Transposition des matrices

Nous avons vu l'intérêt d'une transformation sur les matrices réelles appelée transposition dans notre fichier sur les formes quadratiques réelles. Voyons alors quelles sont les propriétés d'une telle transformation

I Définition

Pour une matrice A quelconque à m lignes et n colonnes, la transposée de cette matrice est la matrice notée ${}^tA$ dont les lignes sont les colonnes de A.

Autrement dit, cette matrice a un terme général à la i-ème ligne et à la j-ième colonne égal à celui de A à la j-ième ligne et à la i-ème colonne, ce que l'on peut écrire :

$$\boxed{[{}^tA]_{ij} = [A]_{ji}}$$

<u>Exemples</u> :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad {}^tX = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

I Propriétés

1) Caractère involutif

Appliquée deux fois, la transposition redonne la matrice initiale. On dit de cette transformation qu'elle est **involutive** :

$$\boxed{{}^{t\,t}A = A}$$

2. Caractère linéaire

Les petits génies en maths, non je blague, ceux qui observent les choses tout simplement, auront remarqué que la transposition d'une matrice revient à faire sa symétrie par rapport à la diagonale descendante et comme une symétrie appliquée deux fois, redonne le même objet de départ, cela semble normal.

Nous allons d'ailleurs voir que la transposition définit ce que l'on appelle une **application linéaire** sur l'ensemble des matrices carrées d'ordre n dans ce même ensemble et c'est également une symétrie vectorielle à cet égard mais nous reviendrons sur ce concept. En effet, nous avons pour deux matrices A et B de même ordre et un réel α :

$$\boxed{\begin{array}{c} {}^{t}(A + B) = {}^{t}A + {}^{t}B \\ {}^{t}(\alpha\, A) = \alpha\, {}^{t}A \end{array}}$$

Ces relations sont tellement évidentes (on dit trivial en mathématiques) qu'elles ne nécessitent pas de preuve.

3. transposition d'un produit matrice –vecteur

Soit A une matrice quelconque à m lignes et n colonnes et X un vecteur colonne d'ordre n. Alors on a :

$$\boxed{{}^{t}(A\,X) = {}^{t}X\, {}^{t}A}$$

<u>Preuve</u> :

Notons $A_1, A_2, \dots A_n$les vecteurs colonnes de A et $x_1, x_2, \dots x_n$ les réels constituant le vecteur colonne X. Nous avons alors, par définition, du produit matrice vecteur :

$$A\,X = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n$$

Nous en déduisons, par linéarité de la transposition :

$$^t(A\,X) = {}^t(x_1A_1) + {}^t(x_2A_2) + \cdots + {}^t(x_nA_n)$$

$$^t(A\,X) = x_1\,{}^tA_1 + x_2\,{}^tA_2 + \cdots + x_n\,{}^tA_n$$

Nous reconnaissons le produit d'un vecteur ligne par une matrice dont les lignes sont les colonnes de A, c'est-à-dire la transposée de A. Nous avons donc bien :

$$^t(A\,X) = {}^tX\,{}^tA$$

3. transposition d'un produit matrice –matrice

Faisons quelques remarques sur le produit matrice – matrice.

A étant supposée à m lignes et n colonnes et B à n lignes et p colonnes, nous désignerons par $A_1^C, A_2^C, \dots A_n^C$ les vecteurs colonnes formant la matrice A, et $A_1^L, A_2^L, \dots A_m^L$ ses vecteurs lignes et emploierons des notations analogues pour la matrice B.

Par définition la matrice produit A B est la a matrice formée des p vecteurs colonnes $A\,B_1^C, A\,B_2^C, \dots A\,B_p^C$ que nous noterons :

$$\boxed{A\,B = \left(A\,B_1^C\,\middle|A\,B_2^C\middle|\,\dots A\,B_p^C\right)}$$

Mais nous pouvons facilement observer que la matrice A B est également la matrice formée des m vecteurs lignes $A_1^LB, A_2^LB, \dots A_m^LB$ ce que nous écrirons :

$$\boxed{A\,B = \begin{pmatrix} A_1^LB \\ \hline A_2^LB \\ \vdots \\ \hline A_m^LB \end{pmatrix}}$$

La matrice transposée de la matrice A B est alors la matrice dont les vecteurs lignes sont ${}^{t}\left(A\,B_1^C\right)$, ${}^{t}\left(A\,B_2^C\right)$, … ${}^{t}\left(A\,B_p^C\right)$ c'est-à-dire :

$$ {}^{t}(A\,B) = \begin{pmatrix} {}^{t}\left(A\,B_1^C\right) \\ \hline {}^{t}\left(A\,B_2^C\right) \\ \vdots \\ \hline {}^{t}\left(A\,B_p^C\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{t}\left(B_1^C\right)\,{}^{t}A \\ \hline {}^{t}\left(B_2^C\right)\,{}^{t}A \\ \vdots \\ \hline {}^{t}\left(B_p^C\right)\,{}^{t}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ({}^{t}B)_1^L\,{}^{t}A \\ \hline ({}^{t}B)_2^L\,{}^{t}A \\ \vdots \\ \hline ({}^{t}B)_p^L\,{}^{t}A \end{pmatrix} $$

Nous avons donc la relation remarquable :

$$ \boxed{{}^{t}(A\,B) = {}^{t}B\,{}^{t}A} $$

Notez l'inversion de l'ordre du produit matriciel par la transposition

4. matrices carrées invariantes par transposition

Les matrices qui sont égales à leur transposées sont toutes les matrices symétriques par rapport à leur diagonale descendante.

Il y a dedans toutes les matrices diagonales.

La somme, la différence, le produit de deux matrices symétriques est encore une matrice symétrique ainsi que le produit d'une matrice par un réel.

5. Transposée d'une matrice inverse

Etant donnée une matrice carrée inversible A d'inverse A^{-1} alors, la transposée de son inverse est l'inverse de sa transposée. Autrement dit :

$$ \boxed{{}^{t}(A^{-1}) = ({}^{t}A)^{-1}} $$

La preuve est aisée. Partons de :

$$ A\,A^{-1} = I $$

en désignant par I la matrice identité et transposons cette relation :

$$ {}^{t}(A\,A^{-1}) = {}^{t}I $$

Soit :

$$ {}^{t}(A^{-1})\ {}^{t}A = I $$

D’où :

$$ {}^{t}(A^{-1}) = ({}^{t}A)^{-1} $$