Transformations de courbes

Nous allons nous intéresser à l'effet de diverses transformations, translations, homothéties, symétries sur l'équation de la courbe représentative d'une fonction f. Puis nous en verrons une application aux fonction de référence comme $f(x) = x^2$ou $f(x) = \frac{1}{x}$ conduisant aux formes canoniques des fonctions du second degré et des fonctions homographiques.

Dans toute la suite $(O, \vec{i}, \vec{j})$ désigne un repère orthogonal , $y = f(x)$ est l'équation de la courbe d'une fonction définie sur un domaine D, et $y = g(x)$ est l'équation de la courbe transformée .

CHAPITRE I : Les transformations

Translation de vecteur $\alpha\ \vec{i}$

Courbe initiale : $y = f(x)$

Courbe transformée : $y = g(x)$ avec $g(x) = f(x - \alpha)$

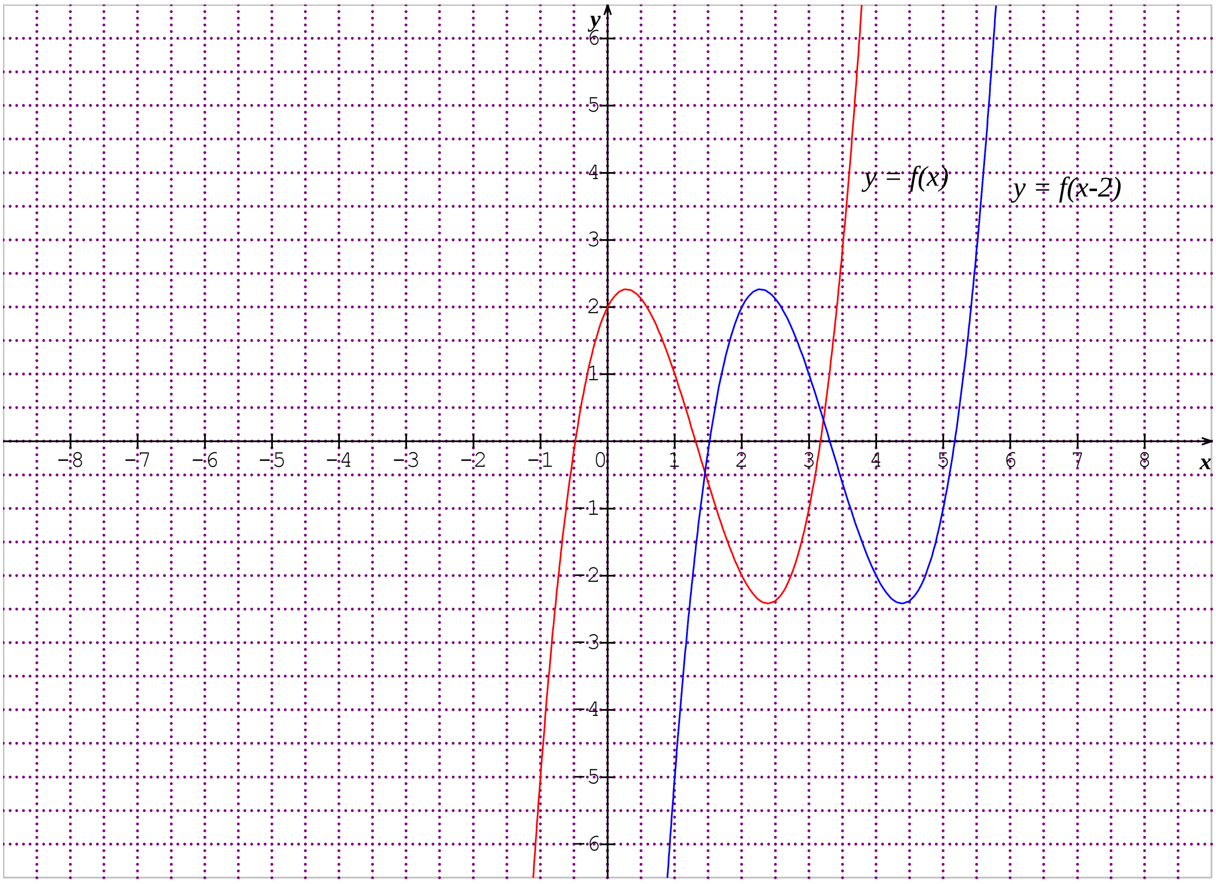
En effet l'image par g d'un réel x est l'image par f du réel $(x - \alpha)$

Si $\alpha > 0$ il s'agit d'une translation dans le sens horizontal des x croissants (vers la droite)

<u>Exemple : $\alpha = 2$</u>

Courbe initiale : $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 2$

Courbe transformée : $y = (x - 2)^3 - 4(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 2$

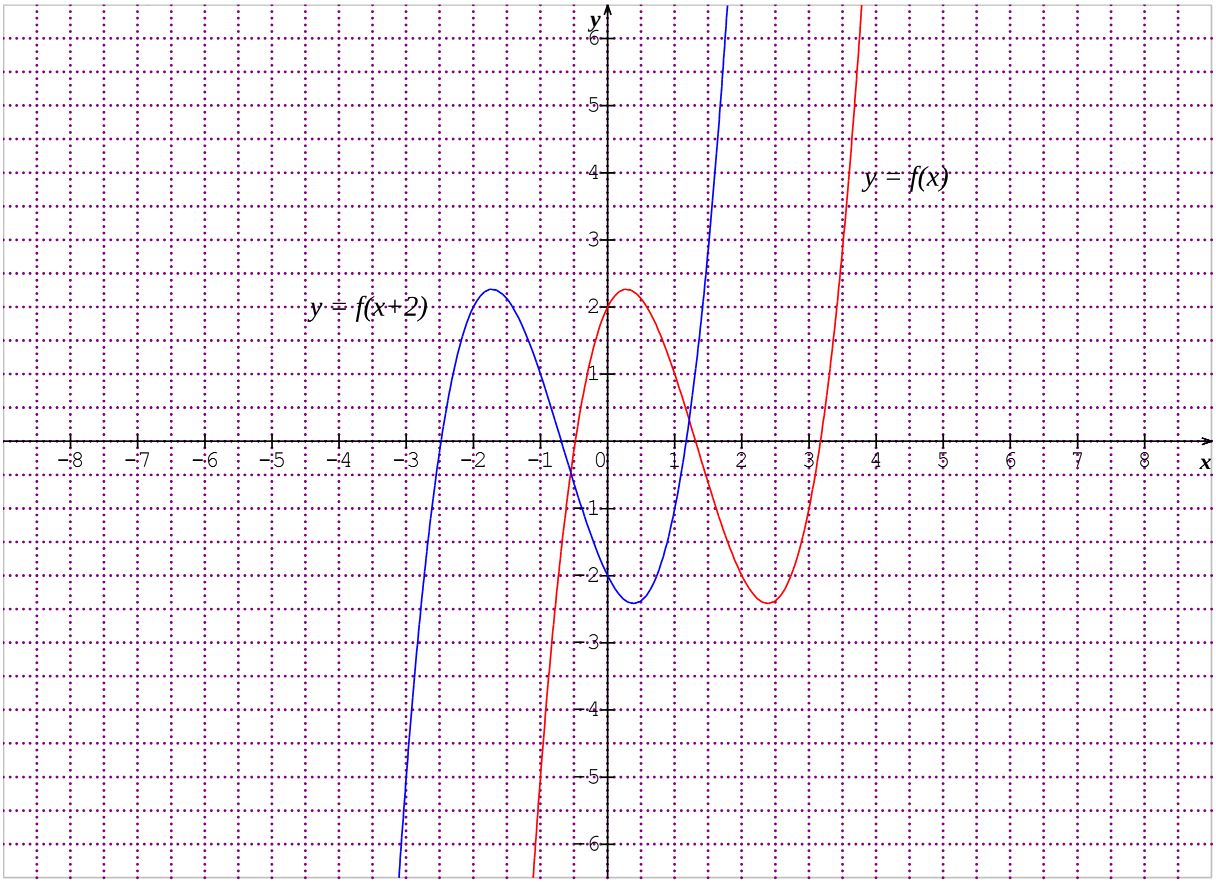


Si $\alpha < 0$ il s'agit d'une translation dans le sens horizontal des x décroissants (vers la gauche)

<u>Exemple : $\alpha = -2$</u>

Courbe initiale : $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 2$

Courbe transformée : $y = (x+2)^3 - 4(x+2)^2 + 2(x+2) + 2$



Translation de vecteur $\beta\vec{j}$

Courbe initiale : $y = f(x)$

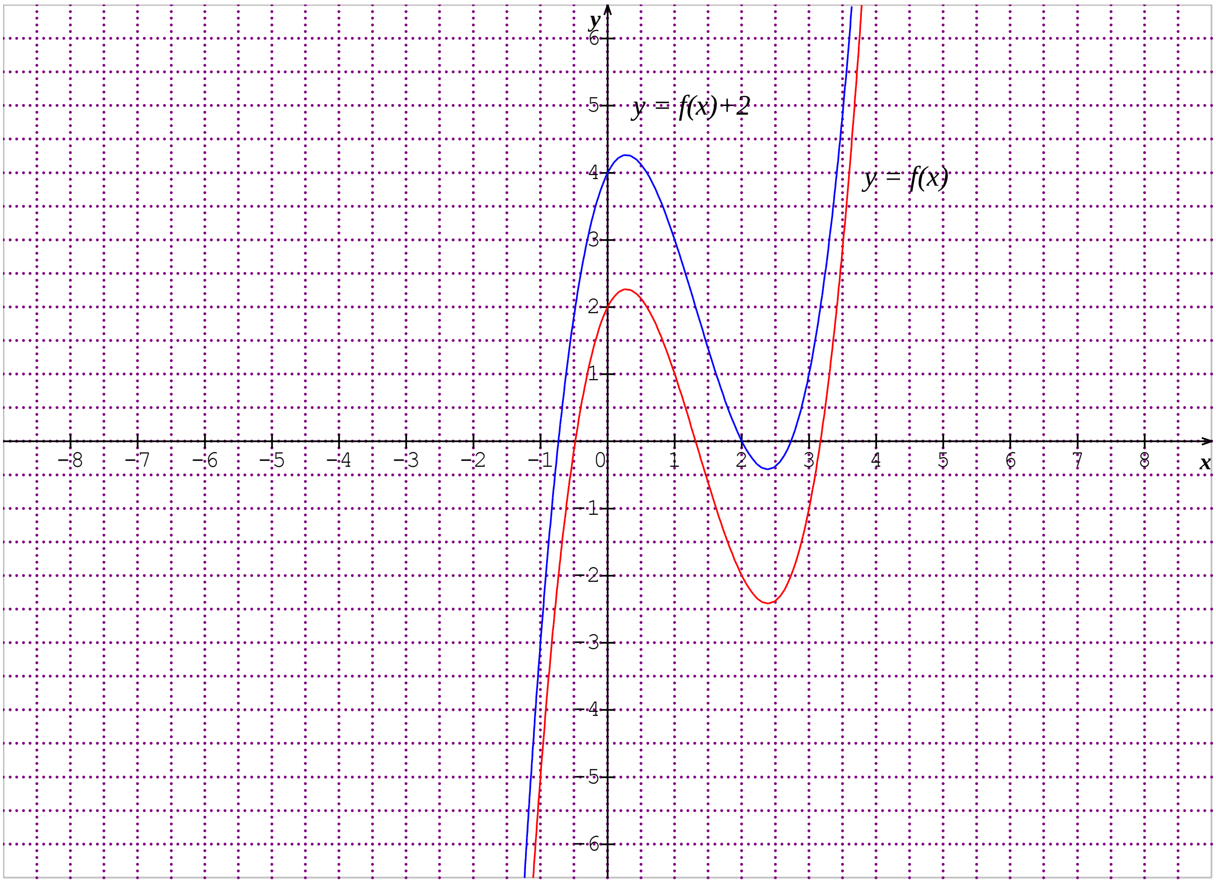
Courbe transformée : $y = g(x)$ avec $g(x) = f(x) + \beta$

Si $\beta > 0$ il s’agit d’une translation dans le sens vertical des y croissants (vers le haut)

<u>Exemple : $\beta = 2$</u>

Courbe initiale : $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 2$

Courbe transformée : $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 4$

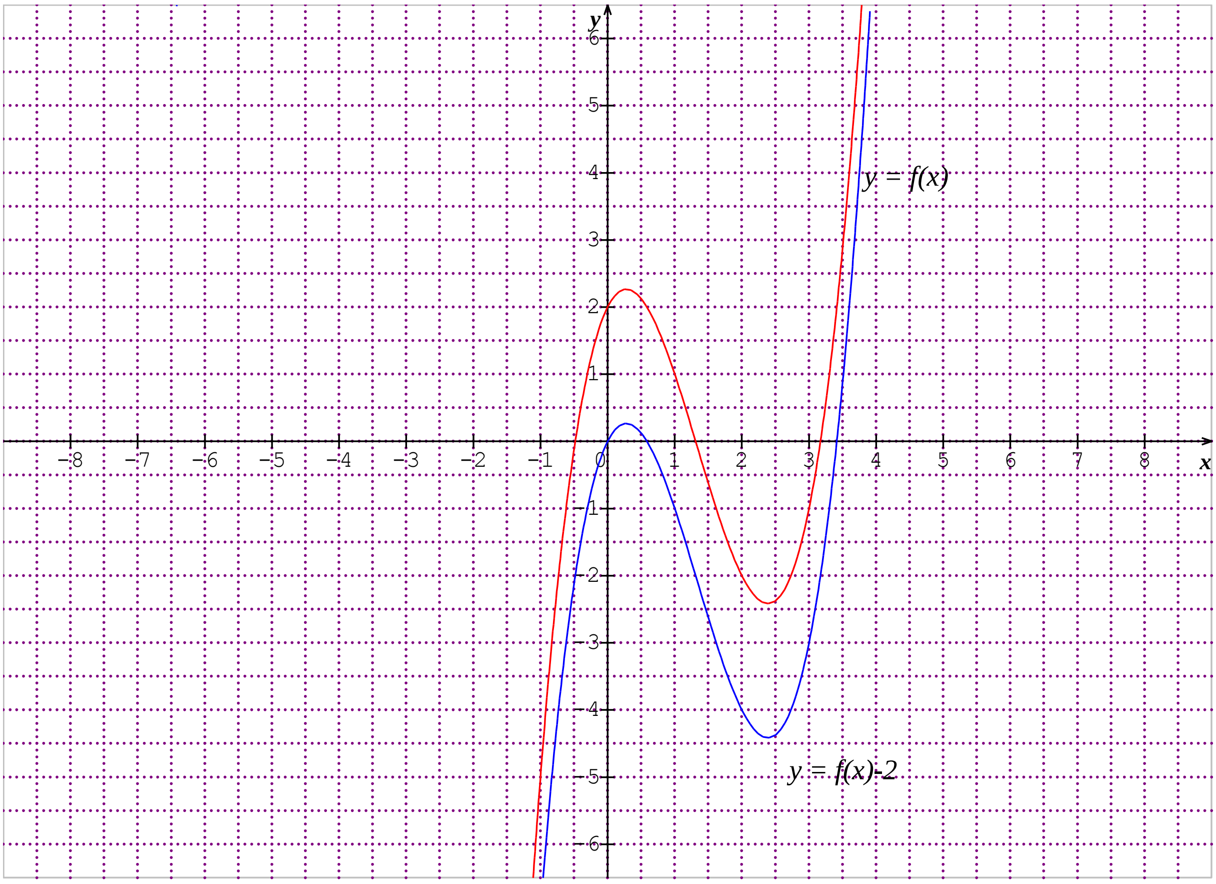


Si β < 0 il s'agit d'une translation dans le sens vertical des y décroissants (vers le bas)

<u>Exemple : β = -2</u>

Courbe initiale : $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 2$

Courbe transformée : $y = x^3 - 4x^2 + 2x$



Homothétie de vecteur A $\vec{j}$

Courbe initiale : y = f(x)

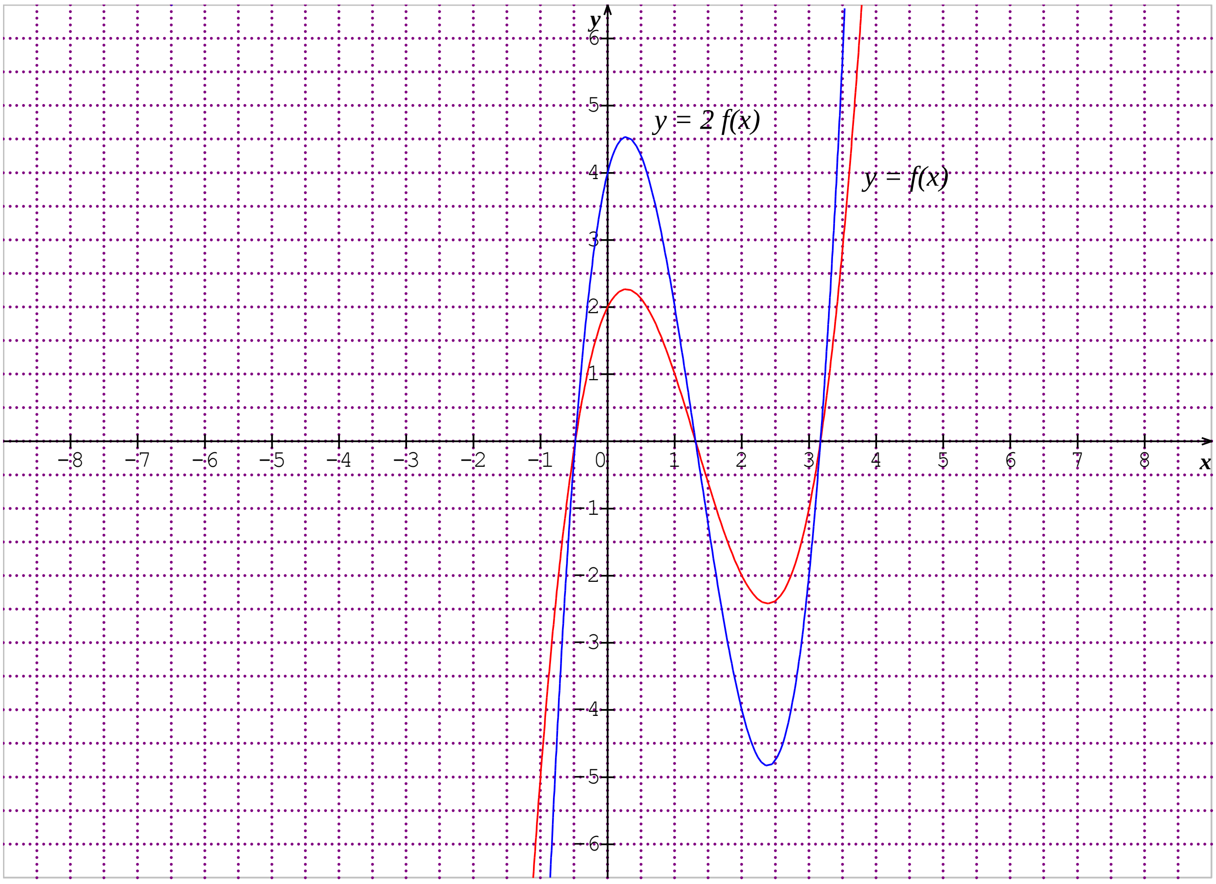
Courbe transformée : y = g(x) avec g(x) = A f(x)

Si A > 0 il s'agit d'une homothétie dans le sens vertical sans retournement (A > 1dilatation, 0 < A <1 contraction)

<u>Exemple : A = 2</u>

Courbe initiale : $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 2$

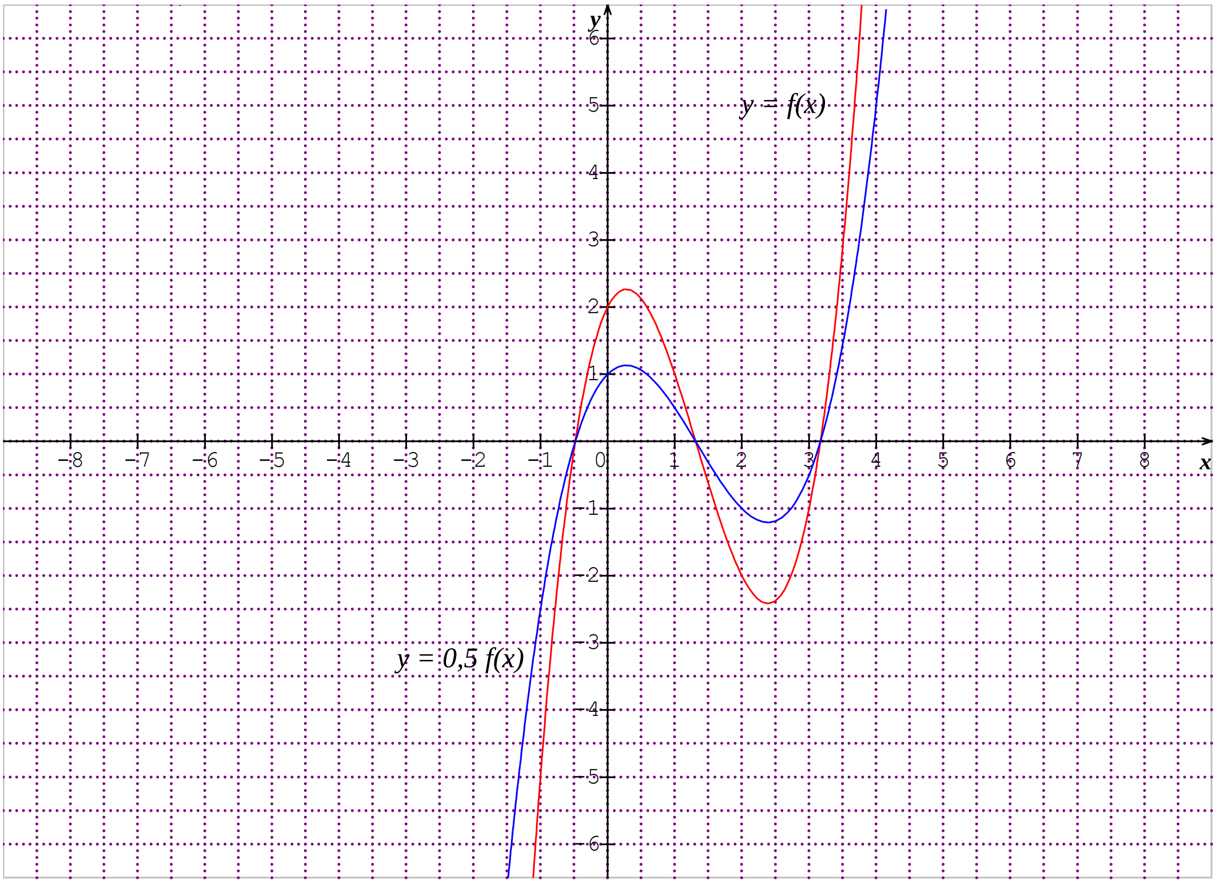
Courbe transformée : $y = 2\ (x^3 - 4x^2 + 2x + 2)$



Exemple : A = 0,5

Courbe initiale : $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 2$

Courbe transformée : $y = 0{,}5\ (x^3 - 4x^2 + 2x + 2)$

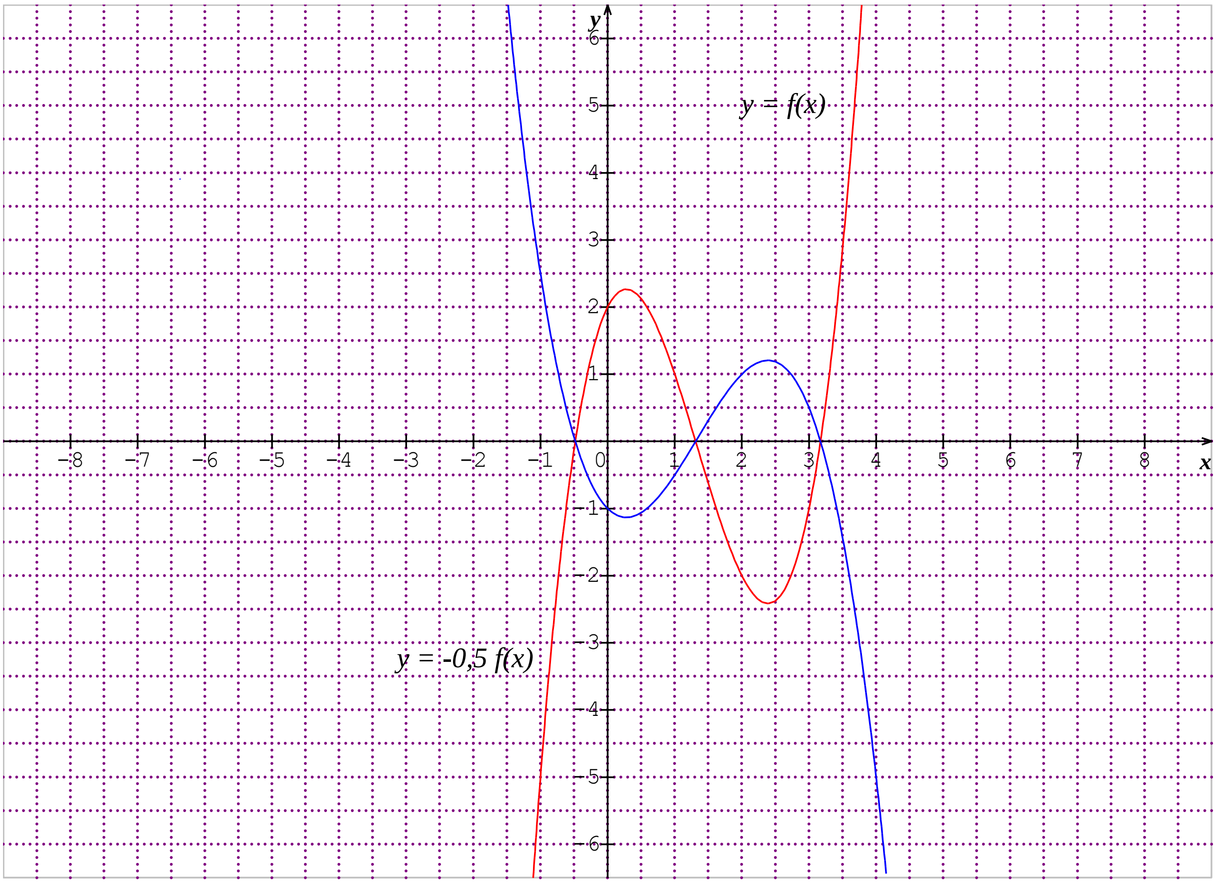


Si A < 0 il s'agit d'une homothétie dans le sens vertical avec retournement (A < -1dilatation, -1 < A <0 contraction)

Exemple : A = - 0,5

Courbe initiale : $y = x^3 - 4x^2+2x+2$

Courbe transformée : $y = -0{,}5\ (x^3 - 4x^2 + 2x + 2)$



Homothétie de vecteur k $\vec{\imath}$

Courbe initiale : y = f(x)

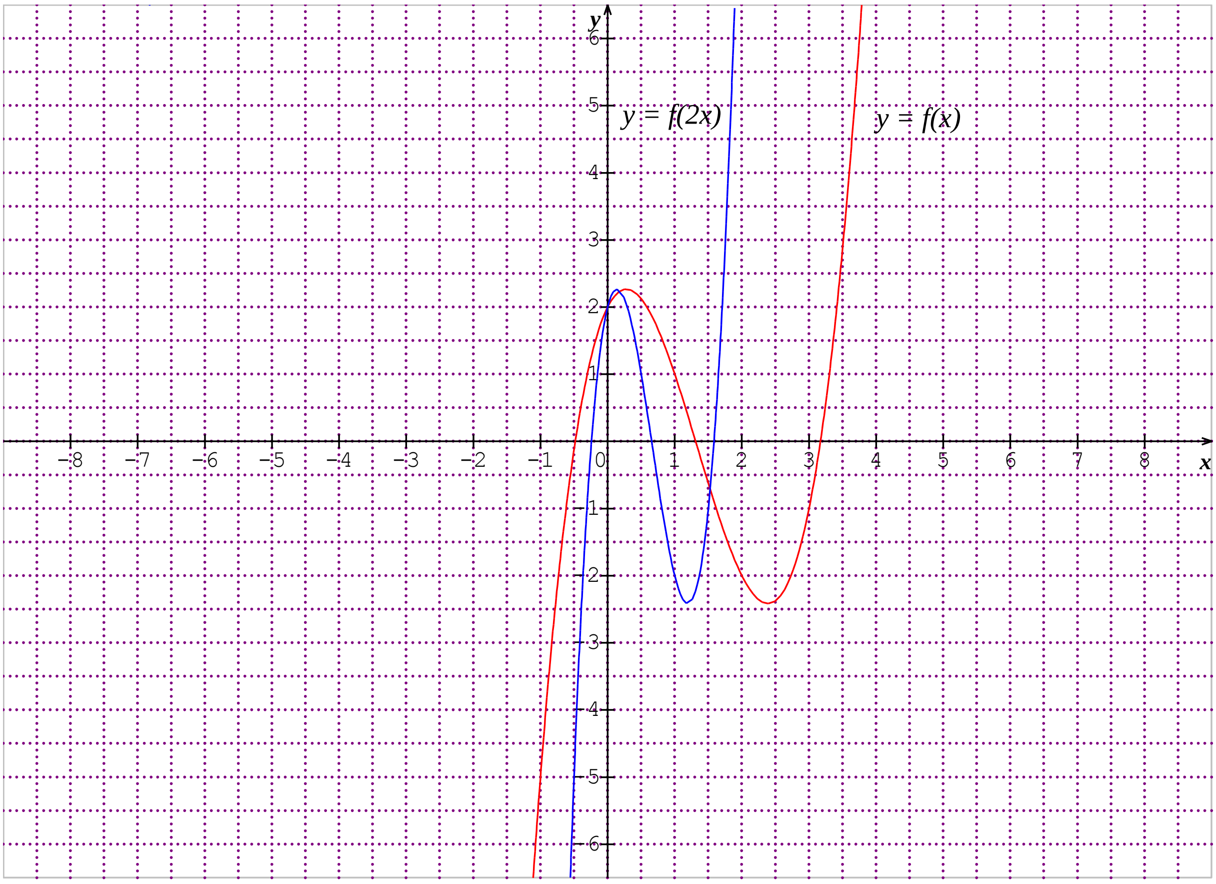
Courbe transformée : y = g(x) avec g(x) = f(k x)

Il s'agit d'une homothétie dans le sens horizontal (k > 1contraction, 0 < k <1 dilatation)

<u>Exemple : A = 2</u>

Courbe initiale : $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 2$

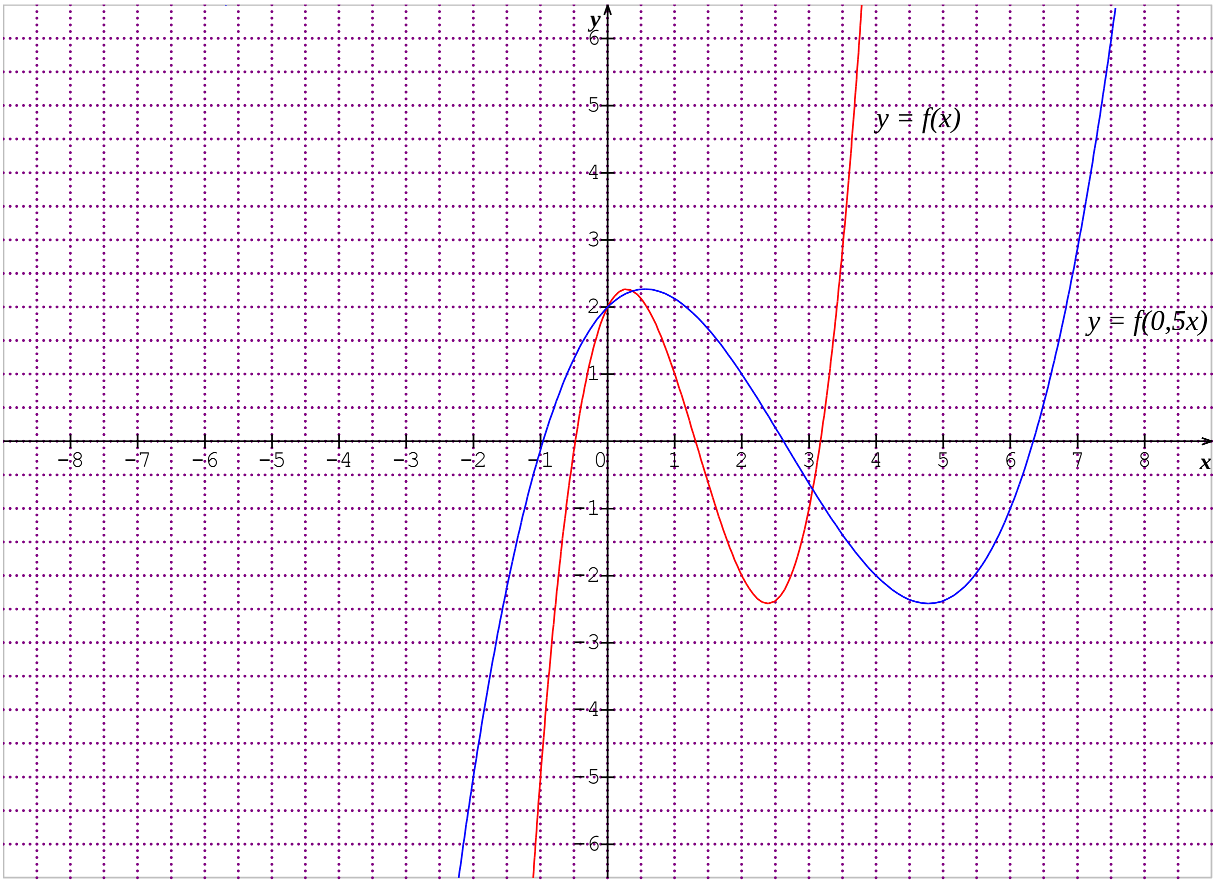
Courbe transformée : $y = (2x)^3 - 4(2x)^2 + 2(2x) + 2$



Exemple : A = 0,5

Courbe initiale : $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 2$

Courbe transformée : $y = (0{,}5x)^3 - 4(0{,}5x)^2 + 2(0{,}5x) + 2$



Symétrie d'axe (Ox)

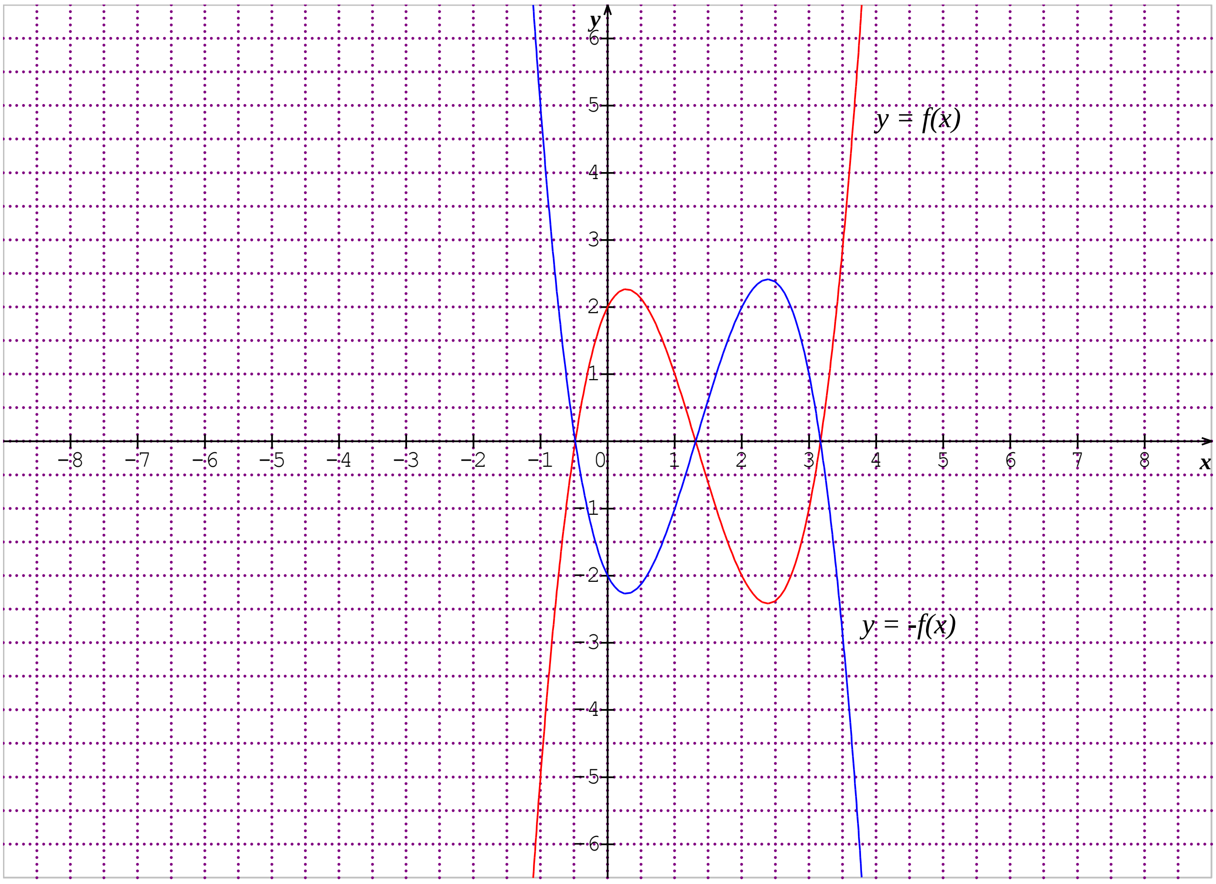
Courbe initiale : y = f(x)

Courbe transformée : y = g(x) avec g(x) = -f(x)

<u>Exemple :</u>

Courbe initiale : $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 2$

Courbe transformée : $y = -(x^3 - 4x^2 + 2x + 2)$



Symétrie d'axe (Oy)

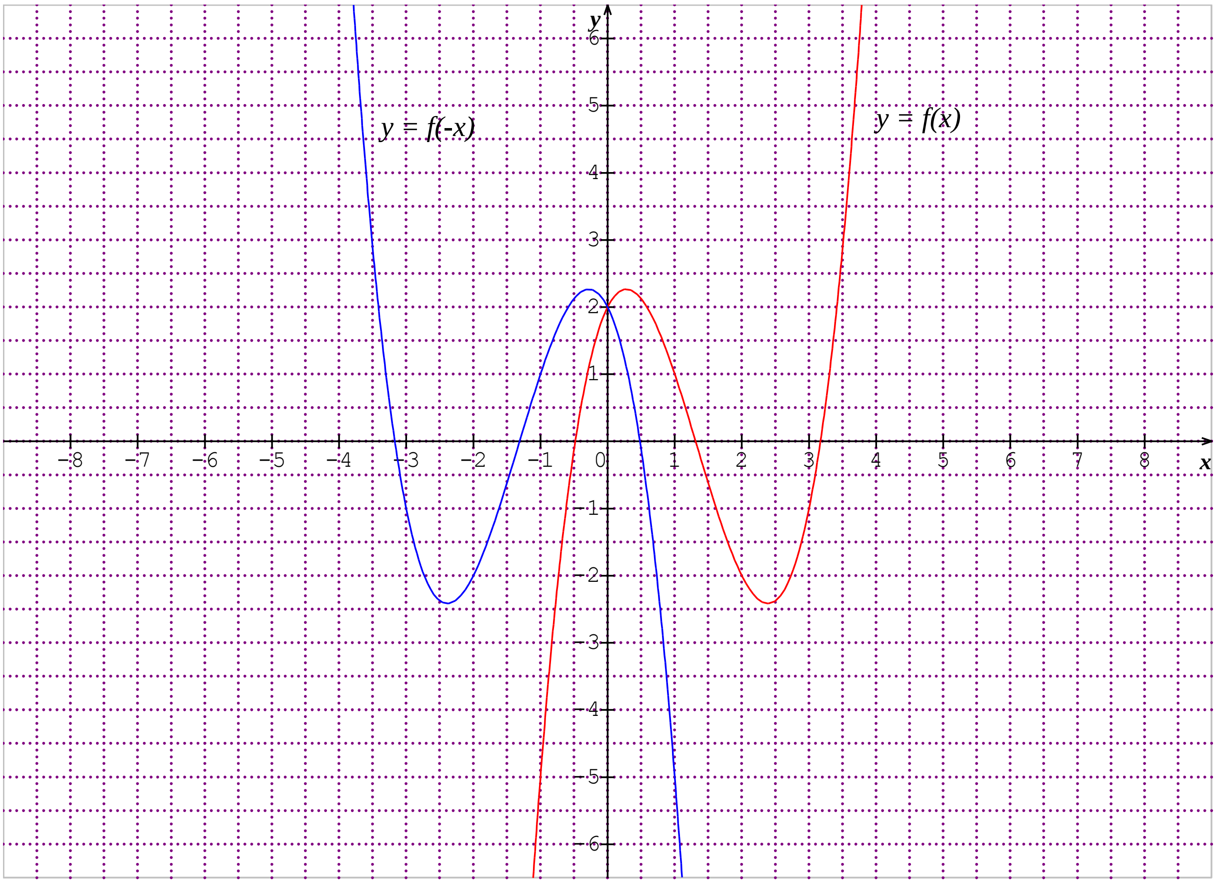
Courbe initiale : y = f(x)

Courbe transformée : y = g(x) avec g(x) = f(- x)

<u>Exemple :</u>

Courbe initiale : $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 2$

Courbe transformée : $y = (-x)^3 - 4(-x)^2 + 2(-x) + 2$



CHAPITRE II : application aux formes canoniques

Nous allons voir dans ce chapitre que les fonctions du second degré et les fonctions homographiques peuvent se déduire par les transformations précédentes des fonctions carré et inverse respectivement.

Pour cela nous partons de la fonction carré ou de la fonction inverse puis appliquons successivement une homothétie de vecteur a $\vec{j}$, une translation de vecteur $\alpha\ \vec{i}$ et une translation de vecteur $\beta\,\vec{j}$.

Courbe initiale : $y = f(x)$

Courbe transformée : $y = g(x)$ avec $g(x) = a\, f(x - \alpha) + \beta$

Voyons ce que cela donne dans les deux cas

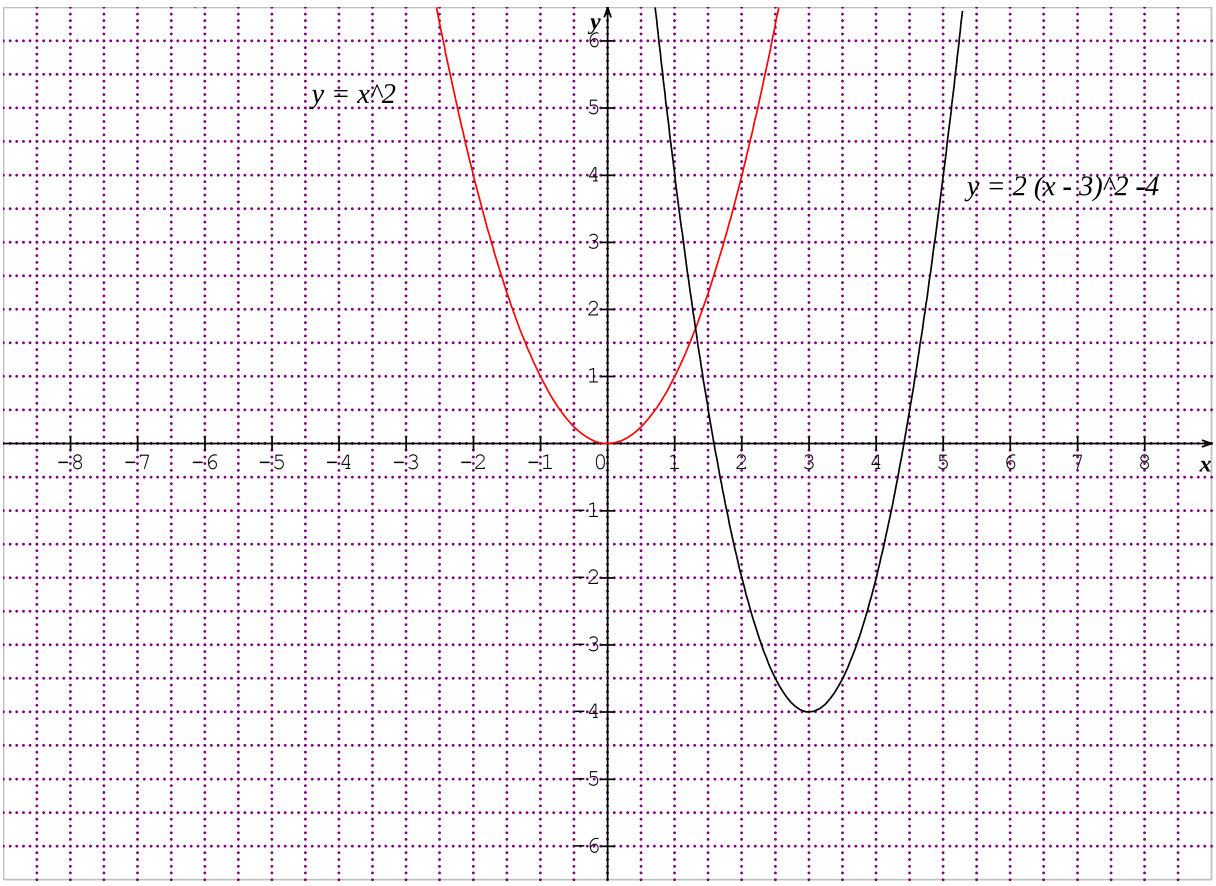
<u>Transfomation de la fonction carré</u>

Courbe initiale : $y = x^2$
Courbe transformée : $y = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$

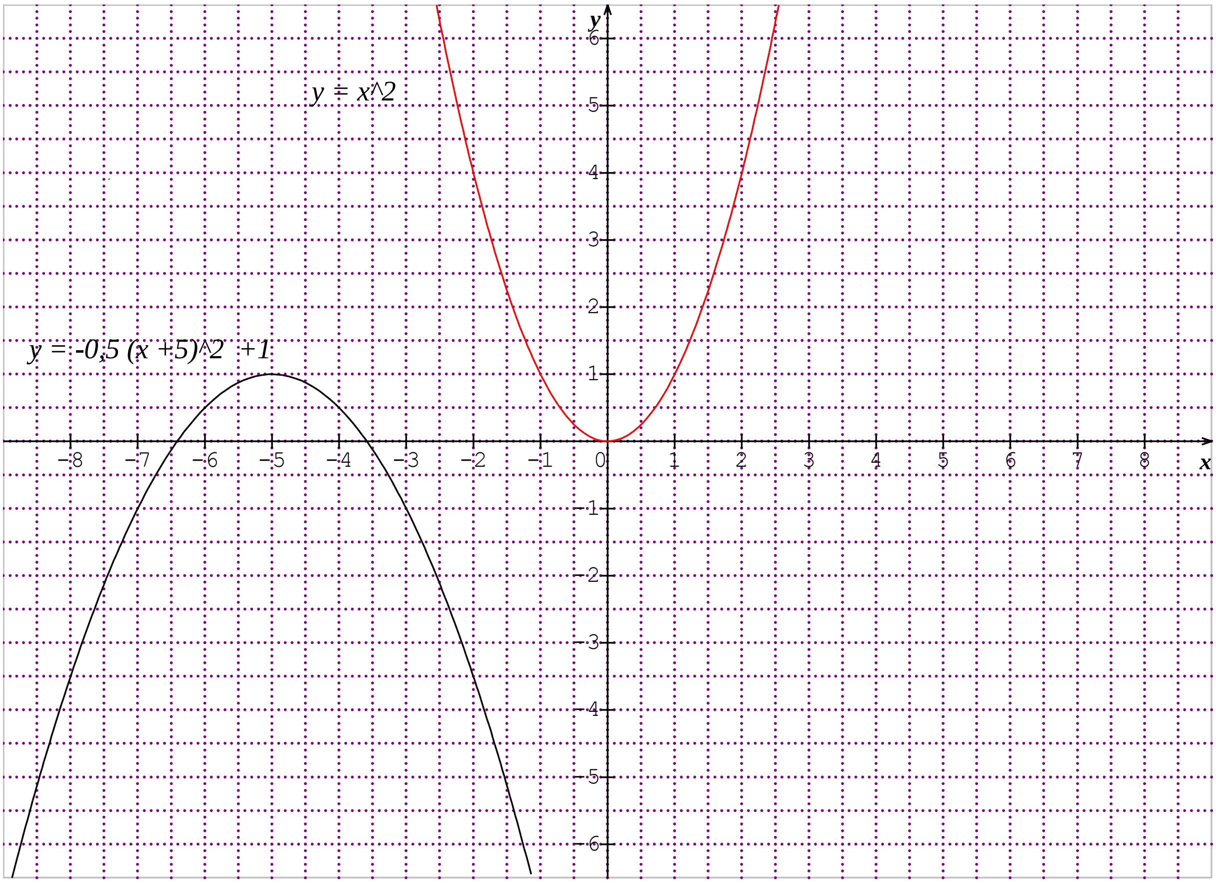
La courbe transformée est appelée <u>parabole</u> et présente un sommet $\Omega(\alpha;\ \beta)$ et un axe de symétrie $(x = \alpha)$.

Voici l'allure pour quelques valeurs de a, α, β

Exemple : $a = 2, \alpha = 3,\ \beta = -4$



Exemple : a = -0,5, $\alpha = -5,\ \beta = -4$



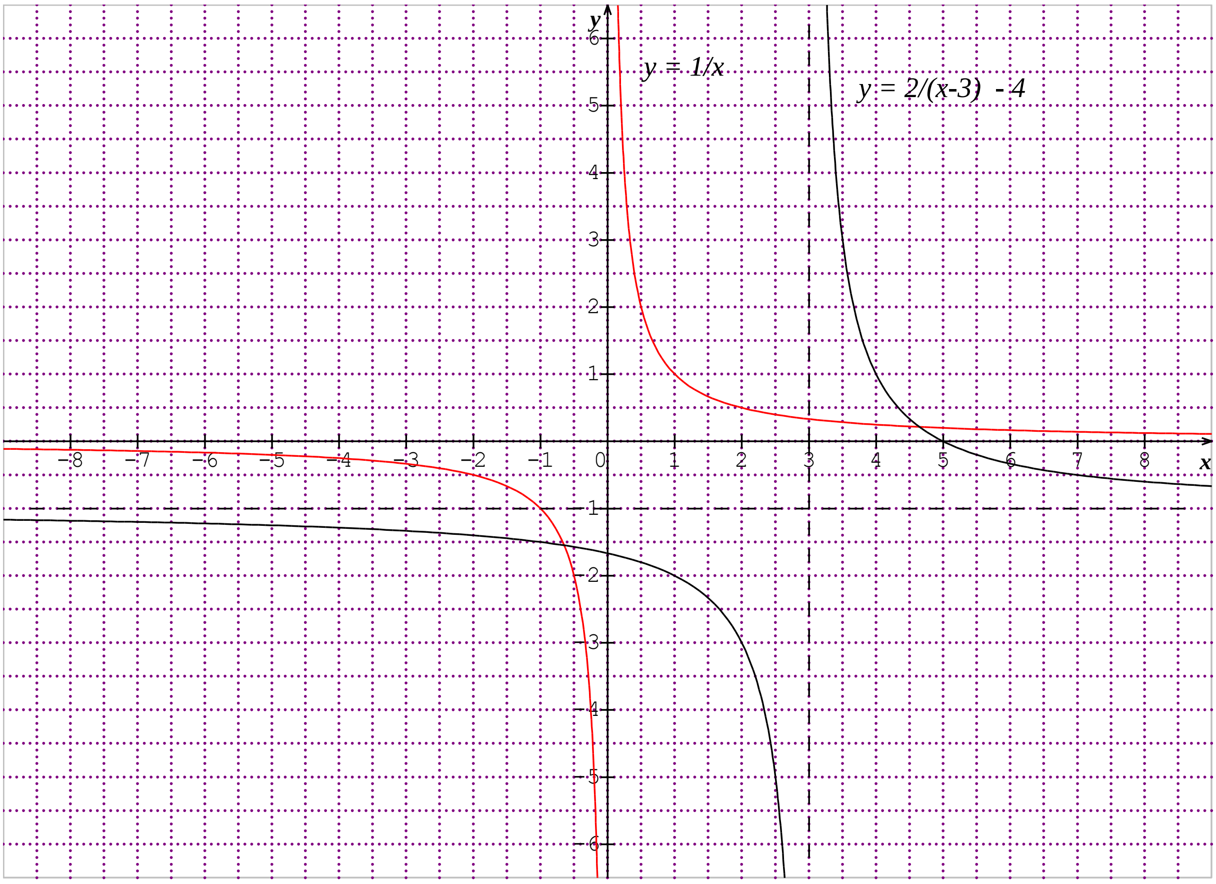
Transfomation de la fonction inverse

$$\text{Courbe initiale :}\quad y = \frac{1}{x}$$

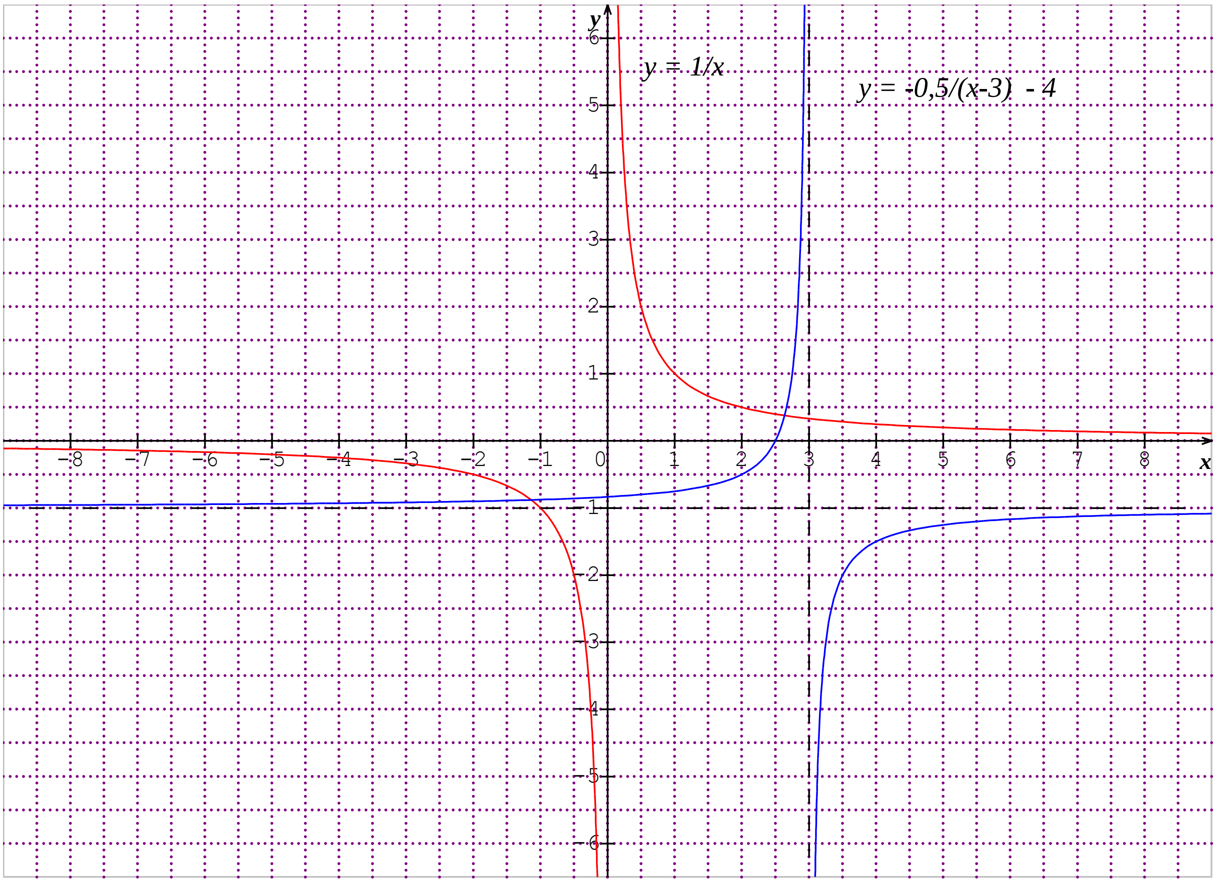
$$\text{Courbe transformée :}\quad y = \frac{A}{x - \alpha} + \beta$$

La courbe transformée est appelée hyperbole et présente un centre de symétrie $\Omega(\alpha;\ \beta)$.

Exemple : $A = 2, \alpha = 3,\ \beta = -1$



Exemple : A = -0,5, $\alpha = 3$, $\beta = -1$



Fonctions du second degré :

En développant la fonction transformée de la fonction carré, on obtient :

$g(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta = a\,x^2 - \;2\,a\,\alpha\,x + a\,\alpha^2 + \beta$

Donc g est de la forme :

$$g(x) = \;a\,x^2 + \;b\,x + c$$

$$\text{Avec}\begin{cases} b = -\,2\,a\,\alpha \\ c = a\,\alpha^2 + \;\beta \end{cases}$$

$$\text{Et } a \neq 0$$

g est appelé polynôme du second degré.

Or le système précédent peut se résoudre en $(\alpha;\;\beta)$ ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \alpha = -\,\dfrac{b}{2\,a} \\ \beta = \dfrac{4\,a\,c\;-b^2}{4\,a} \end{cases}$$

Cela montre que toute fonction du second degré g peut se mettre sous forme :

$$g(x) = a\,x^2 + \;b\,x + c = \;a\,(x-\alpha)^2 + \beta$$

La deuxième forme est appelée <u>forme canonique</u> du polynôme du second degré.

Ceci permet de déduire les variations de g de celles de la fonction $a\,x^2$

Fonctions homographiques :

En réduisant au même dénominateur la fonction transformée de la fonction inverse, on obtient :

$$g(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \;\beta = \;\frac{\beta\,x + A - \alpha\,\beta}{x-\alpha}$$

g est donc une fonction de la forme :

$$g(x) = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}\;\text{avec } c\; \neq 0$$

Ce type de fonction définie sauf pour $\alpha = \frac{-d}{c}$ est qualifié d'homographique

Réciproquement toute fonction de ce type peut se mettre sous une forme canonique, en effet :

Posons $\alpha = \dfrac{-d}{c}$ soit $d = -c\,\alpha$, alors :

$$g(x) = \frac{a\,x + b}{c\,x + d} = \frac{a\,x + b}{c\,(x - \alpha)} = \frac{a\,(x - \alpha) + a\,\alpha + b}{c\,(x - \alpha)} = \frac{a}{c} + \frac{a\,\alpha + b}{c\,(x - \alpha)}$$

Soit donc :

$$g(x) = \frac{a\,x + b}{c\,x + d} = \frac{A}{x - \alpha} + \beta \quad \text{avec}$$

$$\alpha = \frac{-d}{c}$$

$$\beta = \frac{a}{c}$$

$$A = \frac{a\,\alpha + b}{c} = \frac{-a\,d + b\,c}{c^2}$$