Transferts thermiques

1) **Les trois types de transfert**

- Transfert par conduction :

Lorsque deux corps de températures différentes sont mis en contact tout en échangeant ni travail ni chaleur avec le milieu extérieur, il se produit un transfert de chaleur du corps le plus chaud vers le corps le plus froid jusqu'à ce que l'ensemble soit à une même température.

- Transfert par convection :

Lorsqu'un corps est plongé dans un fluide en mouvement, il se produit un transfert de chaleur du corps vers le fluide si le corps est plus chaud que le fluide et l'inverse sinon

- Transfert par radiation :

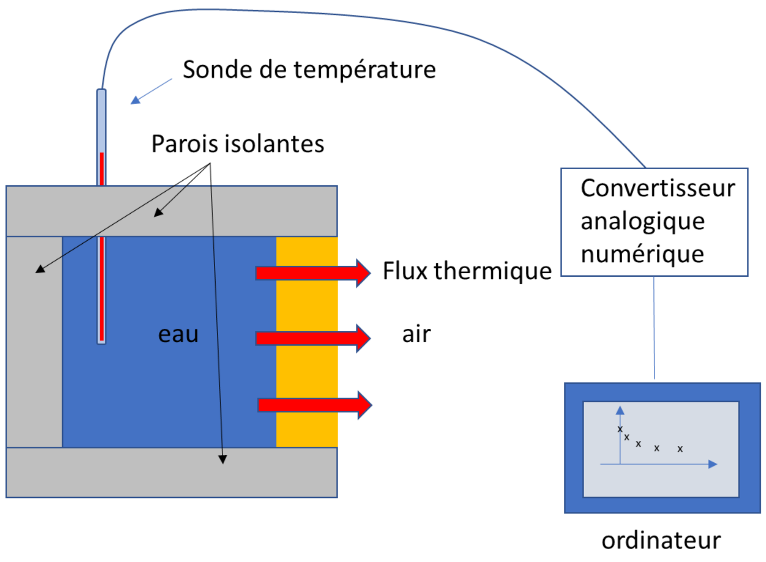
Tout corps émet un rayonnement capté par d'autres corps de son environnement et inversement reçoit un rayonnement provenant de ces autres corps . Une partie du rayonnement reçue peut être convertie en chaleur, ce qui augmente la température de ce corps.

2) Modélisation du transfert par conduction

a) Cas d'une paroi plane qui n'échange que par une surface :

Imaginons l'expérience suivante :

Une enceinte calorifugée sauf au niveau d'une paroi de forme parallélépipédique est remplie d'eau pure de température initiale T_1. L'air environnant est à une température T_2 considérée comme restant constante au cours de l'expérience. Un thermomètre permet de suivre l'évolution de la température T de l'eau du calorimètre, considérée à tout instant comme uniforme (Au besoin, on peut imaginer que le calorimètre est équipée d'un mélangeur, lequel apporte une énergie négligeable à l'eau).



Notons U l'énergie interne de l'eau du calorimètre. Alors, d'après le premier principe de la thermodynamique, la variation infinitésimale dU de cette énergie entre deux instants très proches t et $t + dt$, est égale à la chaleur δQ échangée par cette eau avec son environnement, soit :

$$\delta Q = dU$$

car l'eau n'échange pas de travail avec cet environnement.

Or cette chaleur, est la chaleur transférée à la paroi. En admettant que la paroi ne contient aucune source de production de chaleur (comme des résistances électriques par exemple) et qu'elle ne fait donc que transférer la chaleur qu'elle reçoit, cette chaleur δQ est également celle transférée à l'air environnant.

Définissons alors le flux de chaleur ϕ transféré par l'eau à l'air environnant :

$$\phi = -\frac{\delta Q}{dt}$$

Le signe moins provient du fait que si l'eau cède de la chaleur, elle perd de l'énergie interne donc δQ est négatif, et le flux de chaleur transféré à l'air est positif.

Or la chaleur échangée par l'eau a aussi pour expression :

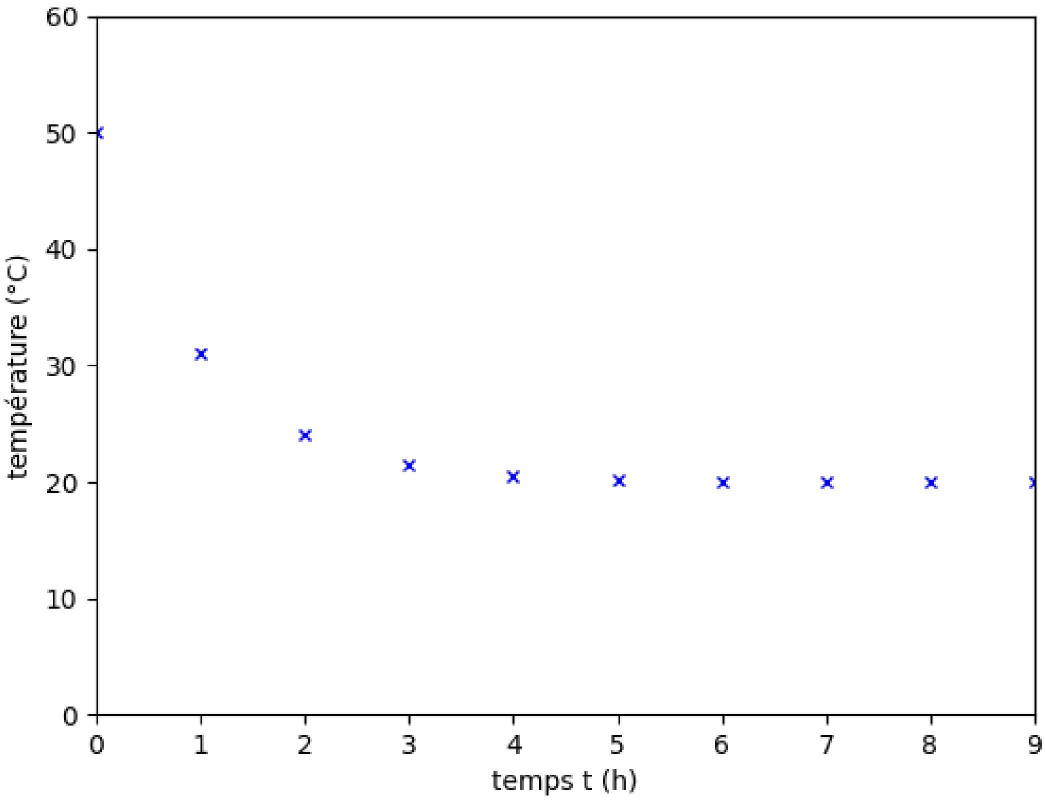
$$\delta Q = m\, c\, dT$$

où m est la masse d'eau, c sa capacité thermique massique ($4{,}18\ kJ\ kg^{-1}\ K^{-1}$) dT la variation de température de l'eau sur la durée dt.

Ainsi :

$$\phi = -m\, c\, \frac{dT}{dt}$$

En faisant un relevé régulier de la température de l'eau (le capteur de température peut être relié à une carte arduino et les relevés affichés sur l'écran d'un ordinateur) on obtient une courbe de la forme :



Comme attendu, la température de l'eau tend bien vers la température T_2 de l'air environnant. L'allure de la courbe suggère un modèle de la forme :

$$T = T_2 + (T_1 - T_2)\, e^{-k\,t}$$

Ainsi :

$$\phi = m\,c\,k\,(T_1 - T_2)\, e^{-k\,t} = m\,c\,k\,(T - T_2)$$

Soit, en notant $K = m\,c\,k$:

$$\phi = K\,(T - T_2)$$

La question qui se pose alors : De quels paramètres dépend K ?

On peut vérifier, ce qui semble intuitif, que K est proportionnelle à la surface d'échange S. Si la surface est double, le flux de chaleur est double. Qu'en est-il vis-à-vis de la paroi ? On peut vérifier que si l'épaisseur e de la paroi double alors le flux de chaleur est divisé par deux, ce qui suggère que K est inversement proportionnel à e.

Ceci amène au modèle suivant de transfert par conduction au travers de la paroi

$$\phi = \lambda \frac{S\,(T - T_2)}{e}$$

λ étant un coefficient qualifié de conductivité thermique de la paroi et qui ne dépend que de la nature de son matériau.

ϕ s'exprime en Watt (symbole W)

Voici quelques valeurs de la conductivité thermique pour différents matériaux :

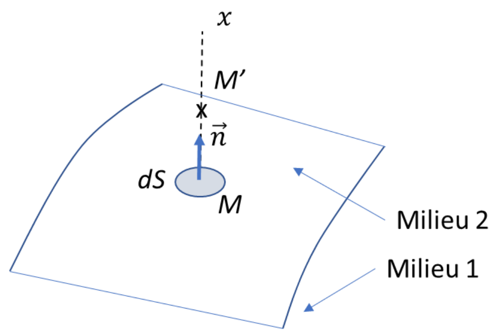
TABLEAUX DES CONDUCTIVITES THERMIQUES DES MATERIAUX

MATERIAUX CONDUCTEURS	CONDUCTIVITE THERMIQUE (λ)	MATERIAUX ISOLANTS	CONDUCTIVITE THERMIQUE (λ)
ALUMINIUM	230,00	EAU	0,660
CUIVRE	380,00	PLATRE HAUTE DENSITE	0,500
FONTE	56,00	CAOUTCHOUC	0,400
ACIER	52,00	PLAQUES DE PLATRE	0,350
PLOMB	35,00	BETON CELLULAIRE	0,270
GRANITE	3,00	BOIS NATUREL (chêne)	0,230
PIERRE FROIDE (Marbre)	2,90	PLEXIGLAS	0,190
ARDOISE	2,10	PANNEAUX PARTICULES DE BOIS	0,140
POLY CARBONATE ALVEOLAIRE	2,00	LIEGE COMPRIME	0,100
PIERRE MEULIERE	1,80	CARTON	0,07
BETON PLEIN	1,75	FIBRES MINERALES (LV/LR)	0,040
PVC	1,7	LAINE DE VERRE	0,04
ENDUIT CIMENT	1,15	PAILLE	0,04
TERRE CUITE (Brique)	1,15	POLYURETHANE EXPANSE	0,039
VERRE	1,15	POLYURETHANE EXTRUDE	0,033
PIERRE TENDRE	1,00	AIR	0,028

On peut y voir que les métaux ont une très grande conductivité thermique. Ils transmettent très bien la chaleur et sont donc les plus mauvais des isolants, à l'opposé de la laine de verre ou de l'air qui est le meilleur des isolants (à condition d'être emprisonné pour éviter les transferts convectifs).

<u>b) Loi locale du transfert par conduction</u>

Reprenons la loi établie précédemment, mais pour une surface infinitésimale dS prise autour d'un point M séparant un milieu 1 d'un milieu 2 et faisant partie d'une surface isotherme (où tous les points sont à même température). Munissons la perpendiculaire en M à cette surface d'un axe (M, x) orienté du milieu 1 vers le milieu 2 et désignons par λ la conductivité thermique du milieu au voisinage de M.



Alors si M' est un point très voisin de M sur l'axe (M, x) dans le sens des x croissants, le flux thermique $d\phi$ à travers dS peut être modélisé comme celui transféré par un panneau plan d'épaisseur $e = MM'$, de conductivité thermique λ et de surface dS, soit :

$$d\phi = \lambda \frac{dS\,(T(M) - T(M'))}{MM'}$$

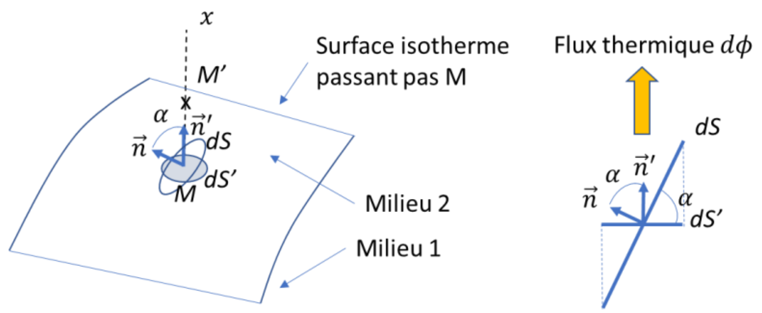
Introduisons alors le flux thermique surfacique :

$$\varphi = \frac{d\phi}{dS}$$

La loi s'écrit :

$$\boxed{\varphi = -\lambda \frac{dT}{dx}}$$

De façon plus générale, si la surface dS ne fait pas partie d'une surface isotherme, il faut introduire la surface dS' qui appartient à la surface isotherme passant par M et telle que le flux de chaleur à travers dS soit le même que celui à travers dS'.



Soit en notant α l'angle que fait la normale $\vec{n}'$ à dS' avec la normale $\vec{n}$ à dS, les normales étant dirigées du milieu 1 vers le le milieu 2, et φ' le flux thermique surfacique :

$$dS' = dS\,cos(\alpha)$$

$$\varphi' = \frac{d\phi}{dS'} = \frac{d\phi}{dS\,cos(\alpha)} = \frac{\varphi}{cos(\alpha)}$$

Ainsi :

$$\varphi = \varphi' \cos(\alpha) = \varphi' \vec{n}' \cdot \vec{n} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{n}' \cdot \vec{n}$$

On définit alors le vecteur gradient de température :

$$\overrightarrow{grad}(T) = \frac{dT}{dx} \vec{n}'$$

Ce vecteur indique la direction et le sens dans lequel la température augmente le plus vite et par sa norme, la variation de cette température par unité de longueur selon cette direction et ce sens.

La loi locale s'écrit alors :

$$\boxed{\varphi = -\lambda \overrightarrow{grad}(T) \cdot \vec{n}}$$

On peut aussi définir le vecteur de flux thermique surfacique ou densité de flux thermique :

$$\boxed{\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{grad}(T)}$$

Et la loi s'écrit :

$$\boxed{\varphi = \vec{\varphi} \cdot \vec{n}}$$

c) Résistance thermique d'une paroi plane- Associations série et parallèle

Reprenons la loi établie précédemment où une paroi de forme parallélépipédique transfère de la chaleur d'un milieu 1 avec lequel elle est en contact par sa surface plane S_1 à un milieu 2 avec lequel elle est en contact par sa surface plane S_2, les deux surfaces étant considérées comme des surfaces isothermes, la première à la température T_1 et la seconde à la température T_2. Le flux ϕ de chaleur transférée de 1 vers 2 est

$$\phi = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_2)$$

ce qui s'écrit :

$$T_1 - T_2 = \frac{e}{\lambda S} \phi$$

On définit alors la résistance thermique de la paroi comme étant :

$$\boxed{R_{th} = \frac{e}{\lambda S}}$$

La formule devient alors :

$$\boxed{T_1 - T_2 = R_{th} \phi}$$

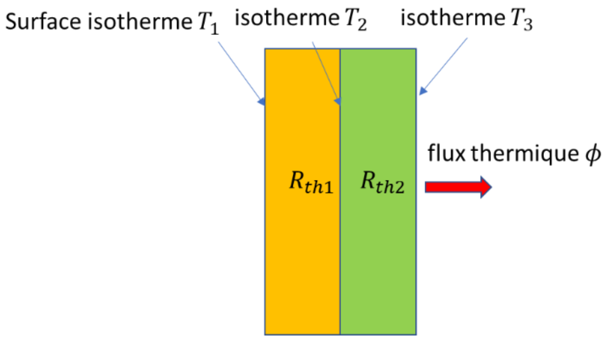
Cette formule est très analogue à celle rencontrée en électricité. En effet, si la surface S_1 était au potentiel V_1 , la surface S_2 au potentiel V_2 et la paroi conductrice d'électricité, de résistance électrique R et traversée par un courant d'intensité I lue de 1 vers 2, on aurait :

$$\boxed{V_1 - V_2 = R I}$$

On voit donc que la température joue le rôle du potentiel électrique, la différence de température entre deux points, celui de différence de potentiel donc de tension, et la densité de flux thermique, celui d'intensité. Le transfert de chaleur se modélise donc d'une façon analogue à celui du transfert de charges dans un circuit.

Cela a pour conséquences que les lois d'association en série et en parallèle de résistors vont avoir leurs analogues dans le domaine du transfert thermique. Voyons cela, pour deux parois, la première de résistance thermique R_{th1} et la seconde de résistance thermique R_{th2} :

<u>Association en série</u> :



Un même flux ϕ est transféré à travers ces parois et l'on a :

$$T_1 - T_2 = R_{th1}\,\phi$$

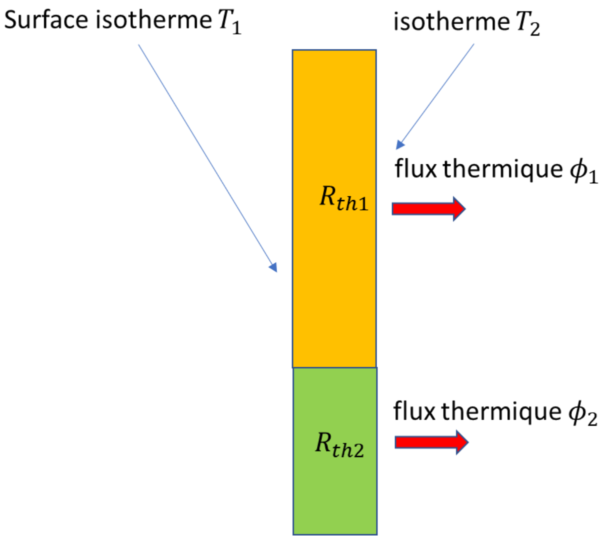
$$T_2 - T_3 = R_{th2}\,\phi$$

Soit, par addition :

$$T_1 - T_3 = (R_{th1} + R_{th2})\,\phi$$

Autrement dit, l'association des deux parois se comporte comme une paroi de résistance thermique égale à la somme des résistance thermiques des deux parois.

<u>Association en parallèle</u> :



Un flux ϕ_1 est transféré à travers la première paroi et un flux ϕ_2 à travers la seconde et l'on a :

$$T_1 - T_2 = R_{th1}\,\phi_1$$

$$T_1 - T_2 = R_{th2}\,\phi_2$$

Le flux total est alors :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \left(\frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}}\right)(T_1 - T_2) = \frac{1}{R_{th}}(T_1 - T_2)$$

soit

$$T_1 - T_2 = R_{th}\,\phi$$

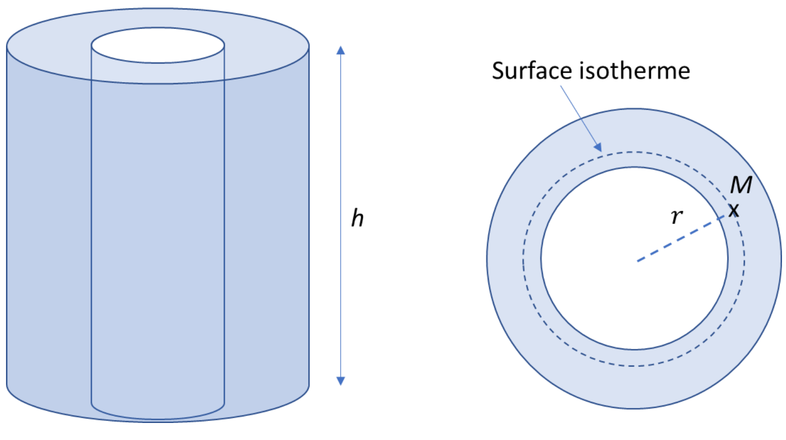
où :

$$\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}}$$

Autrement dit, l'association des deux parois se comporte comme une paroi de résistance thermique telle que son inverse (sa conductance thermique) est égale à la somme des conductances thermiques des deux parois.

d) Résistance thermique d'une paroi cylindrique

Considérons une paroi cylindrique de hauteur h, de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2, faite dans un matériau homogène de conductivité thermique λ de surface intérieure S_1 et de surface extérieure S_2, considérées comme isotherme de températures respectives T_1 et T_2.



Faisons l'hypothèse raisonnable que les surfaces isothermes à l'intérieur de la paroi sont des cylindres de même axe et écrivons en un point M situé à une distance r de l'axe, la loi locale :

$$\varphi = -\lambda\,\frac{dT}{dr}$$

De cette loi, on déduit, le flux thermique transféré à travers un cylindre de rayon r et de surface $S = 2\,\pi\,r\,h$

$$\phi = \varphi\, S = -2\,\pi\, r\, h\, \lambda\ \frac{dT}{dr}$$

Ainsi :

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\phi}{2\,\pi\, h\, \lambda}\,\frac{1}{r}$$

Par intégration, on en déduit :

$$T = -\frac{\phi}{2\,\pi\, h\, \lambda}\ Ln(r) + Cte$$

Ainsi :

$$T_1 = -\frac{\phi}{2\,\pi\, h\, \lambda}\ Ln(r_1) + Cte$$

$$T_2 = -\frac{\phi}{2\,\pi\, h\, \lambda}\ Ln(r_2) + Cte$$

Par différence :

$$\boxed{T_1 - T_2 = \frac{\phi}{2\,\pi\, h\, \lambda}\ Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\,\pi\, h\, \lambda}\ \phi}$$

La résistance thermique de la paroi est donc :

$$\boxed{R_{th} = \frac{Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\,\pi\, h\, \lambda}}$$

Cas où l'épaisseur e de la paroi est petite devant le rayon intérieur.

$$R_{th} = \frac{Ln\left(\frac{r_2}{r_2 - e}\right)}{2\,\pi\, h\, \lambda} = \frac{-Ln\left(\frac{r_2 - e}{r_2}\right)}{2\,\pi\, h\, \lambda} = \frac{-Ln\left(1 - \frac{e}{r_2}\right)}{2\,\pi\, h\, \lambda}$$

Rappelons que pour x petit devant 1 :

$$Ln(1 - x) \approx -x$$

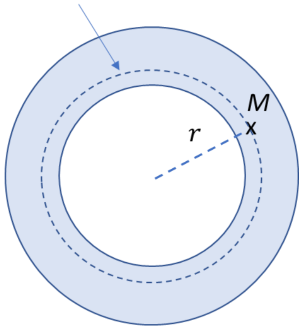
Ainsi , en désignant par S la surface latérale extérieure du cylindre :

$$R_{th} \approx \frac{\frac{e}{r_2}}{2\,\pi\, h\, \lambda} = \frac{e}{2\,\pi\, r_2\, h\, \lambda} = \frac{e}{\lambda\, S}$$

Autrement dit le panneau cylindrique a la même résistance thermique qu'un panneau plan de même épaisseur et de surface égale à sa surface extérieure, ce qui est intuitif.

e) Résistance thermique d'une paroi sphérique

Considérons une paroi sphérique de hauteur h, de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2, faite dans un matériau homogène de conductivité thermique λ de surface intérieure S_1 et de surface extérieure S_2, considérées comme isotherme de températures respectives T_1 et T_2.



Faisons l'hypothèse raisonnable que les surfaces isothermes à l'intérieur de la paroi sont des sphères de même centre et écrivons en d'un point M situé à une distance r de l'axe, la loi locale :

$$\varphi = -\lambda \ \frac{dT}{dr}$$

De cette loi, on déduit, le flux thermique transféré à travers un cylindre de rayon r et de surface $S = 4\,\pi\,r^2$

$$\phi = \varphi\, S = -4\,\pi\,r^2\,\lambda \ \frac{dT}{dr}$$

Ainsi :

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\phi}{4\,\pi\,\lambda}\,\frac{1}{r^2}$$

Par intégration, on en déduit :

$$T = \frac{\phi}{4\,\pi\,\lambda}\,\frac{1}{r} + Cte$$

Ainsi :

$$T_1 = \frac{\phi}{4\,\pi\,\lambda}\,\frac{1}{r_1} + Cte$$

$$T_2 = \frac{\phi}{4\,\pi\,\lambda}\,\frac{1}{r_2} + Cte$$

Par différence :

$$\boxed{T_1 - T_2 = \frac{\phi}{4\,\pi\,\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{4\,\pi\,\lambda}\ \phi}$$

La résistance thermique de la paroi est donc :

$$\boxed{R_{th} = \frac{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{4\,\pi\,\lambda}}$$

Cas où l'épaisseur e de la paroi est petite devant le rayon intérieur.

$$R_{th} = \frac{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{4\,\pi\,\lambda} = \frac{\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}}{4\,\pi\,\lambda} = \frac{e}{4\,\pi\,r_1\,r_2\,\lambda}$$

Ainsi , en désignant par S la surface latérale extérieure du cylindre :

$$R_{th} \approx \frac{e}{4\,\pi\,r_2\,r_2\,\lambda} = \frac{e}{\lambda\,S}$$

Autrement dit le panneau sphérique a la même résistance thermique qu'un panneau plan de même épaisseur et de surface égale à sa surface extérieure, ce qui est intuitif là encore.