Topologie des espaces métriques

I Topologie

1) Notion de distance

$\mathbb{E}$ étant un ensemble quelconque sur lequel est définie une application de la forme :

$$\mathrm{d} : \ \mathbb{E}^2 \to [0; +\infty[$$

$$(A, B) \to d(A, B)$$

d est une distance sur $\mathbb{E}$ si elle vérifie les propriétés :

$$\forall\ (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) \in \mathbb{E}^2 : \begin{cases} \boldsymbol{d(A,A) = 0} \\ \boldsymbol{d(A,B) = d(B,A)} \\ \boldsymbol{d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)} \end{cases}$$

Cette dernière propriété est appelée inégalité triangulaire.

Nous avons déjà vu des exemples, les distances associées aux normes sur un espace vectoriel.

2) Boules ouvertes, boules fermées, Sphères

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{E}$ et $\boldsymbol{\beta} \in]\mathbf{0}; +\infty[$

La boule ouverte de centre A et de rayon $\boldsymbol{\beta}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{E}$:

$$\mathbb{B}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = \{\boldsymbol{B} \in \mathbb{E} : \boldsymbol{d(A,B)} < \beta\}$$

La boule fermée de centre A et de rayon $\boldsymbol{\beta}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{V}$:

$$\mathbb{B}'(\vec{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{\beta}) = \{\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{E} : \boldsymbol{d(A,B)} \leq \boldsymbol{\beta}\}$$

La boule fermée de centre A et de rayon $\boldsymbol{\beta}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{V}$:

$$\mathbb{S}(\vec{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{\beta}) = \{\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{E} : \boldsymbol{d(A,B)} = \boldsymbol{\beta}\}$$

3) Voisinage d’un point

Soit une partie V de $\mathbb{E}$, et A un point de $\mathbb{E}$, on dit que cette partie est un voisinage de A si elle contient une boule ouverte de centre A

Si on note $\mathbb{V}(A)$ l’ensemble des voisinages de A, la définition s’écrit :

$$\boldsymbol{V} \in \mathbb{V}(\boldsymbol{A}) \Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{\beta} \in]\mathbf{0}, +\infty[\ :\ \mathbb{B}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) \subset \boldsymbol{V}$$

4) Ouverts et fermés

Une partie Ω de $\mathbb{E}$ est dite ouverte si elle est voisinage de chacun de ses points.

Une partie $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ est dite fermée si son complémentaire $\mathbb{E}\backslash\mathbb{F}$ est ouvert

5) Notion de limite d’une suite

Soit une suite (A_n) de points de $\mathbb{E}$ et. On dit que la suite a pour limite un point A de $\mathbb{E}$ si :

$$\forall\, \boldsymbol{\varepsilon} \in]\mathbf{0}, +\infty[\ :\ \exists\, \boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}\ :\ \boldsymbol{n} > \boldsymbol{n_0} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{n}} \in\ \mathbb{B}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\varepsilon})$$

On écrira :

$$\lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{A_n} = \boldsymbol{A}$$

6) Distances équivalentes

Soient d et d' deux distances définies sur $\mathbb{E}$, on dit qu’elles sont équivalentes s’il existe deux réels strictement positifs α et β tels que :

$$\forall\, (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\ \in \mathbb{V}^2\ :\ \boldsymbol{\alpha}\, \boldsymbol{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leq \boldsymbol{d}'(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\ \leq\ \boldsymbol{\beta}\, \boldsymbol{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$$

On écrira :

$$\boldsymbol{d} \sim \boldsymbol{d}'$$

Cette relation sur les distances est une relation d'équivalence, elle est :

- réflexive :

$$d \sim d$$

- symétrique :

$$d \sim d' \Rightarrow d' \sim d$$

- transitive :

$$d \sim d' et\ d' \sim d" \Rightarrow d \sim d"$$

Preuves :

Démonstrations analogue à celles sur les normes équivalentes

7) Unicité de la limite

Si une suite (A_n) de points de $\mathbb{E}$ converge vers un point A de $\mathbb{E}$ et un point B de $\mathbb{E}$ alors $A = B$

Preuve :

Soit $\varepsilon \in]0, +\infty[$ alors :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ n > n_0 \Rightarrow d(A_n, A) < \varepsilon$$

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} :\ n > n_1 \Rightarrow N(A_n - B) < \varepsilon$$

Or :

$$d(A, B) \leq d(A, A_n) + d(A_n, B)$$

En prenant :

$$n_2 = \max(n_0, n_1) + 1$$

on a :

$$d(A, B) < 2\,\varepsilon$$

donc :

$$d(A, B) = 0$$

d'où :

$$A = B$$

8) Propriété de Cauchy et notion d'espace vectoriel normé complet

Si une suite (A_n) de points de $\mathbb{E}$ converge vers un point A de $\mathbb{E}$ alors elle vérifie :

$$\forall\, \boldsymbol{\varepsilon} \in \left]\mathbf{0}, +\infty\right[\,:\, \exists\, \boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N} : \forall\, (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) \in \mathbb{N}^{\mathbf{2}} :\, \boldsymbol{n} > \boldsymbol{n_0} \Rightarrow\, \boldsymbol{d}(\boldsymbol{A_{n+m}}, \boldsymbol{A_n}) < \varepsilon$$

Si la réciproque est vraie, $\mathbb{E}$ est dit complet pour la distance $\boldsymbol{d}$

Preuve :

$$d\left(\vec{U}_{n+m}, \vec{U}_n\right) \leq d\left(\vec{U}_{n+m}, \vec{a}\right) + d\left(\vec{a}, \vec{U}_n\right)$$

Soit $\varepsilon \in \left]0, +\infty\right[$ alors :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\, n > n_0 \Rightarrow\, d\left(\vec{U}_n, \vec{a}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$\forall\, (n, m) \in \mathbb{N}^2 : n > n_0 \Rightarrow d\left(\vec{U}_{n+m}, \vec{U}_n\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

9) Caractérisation séquentielle des fermés

Une partie $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ est fermée si et seulement si elle vérifie :

Pour toute suite A_n de points de $\mathbb{F}$ telle que A_n converge vers une limite A, cette limite appartient à $\mathbb{F}$

Preuve :

Sens direct

Soit une suite A_n de vecteurs de $\mathbb{F}$ telle que A_n converge vers une limite A. Supposons par l'absurde que A ne soit pas dans $\mathbb{F}$ alors il est dans son complémentaire qui est ouvert. Donc :

$$\exists\, \beta \in \left]0; +\infty\right[\,:\, \mathbb{B}(A, \beta) \subset \mathbb{E} \backslash \mathbb{F}$$

Or :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ n > n_0 \Rightarrow\ A_n \in\ \mathbb{B}(A,\beta) \Rightarrow A_n \notin\ \mathbb{F}$$

Ceci est contradictoire donc $A \in \mathbb{F}$

<u>Sens réciproque</u> :

Supposons que pour toute suite A_n de vecteurs de $\mathbb{F}$ telle que A_n converge vers une limite A, cette limite appartienne à $\mathbb{F}$. Supposons par l'absurde que $\mathbb{E}\backslash\mathbb{F}$ n'est pas ouvert. Alors il existe un point A de $\mathbb{E}\backslash\mathbb{F}$ dont $\mathbb{E}\backslash\mathbb{F}$ n'est pas un voisinage. Toute boule ouverte centrée sur A contient alors au moins un point de $\mathbb{F}$. Ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* :\ \exists\, A_n \in \mathbb{F} \cap \mathbb{B}\left(A, \frac{1}{n}\right)$$

Soit alors $\varepsilon \in \left]0, +\infty\right[$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow d(A_n, A) < \varepsilon$$

donc :

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = A$$

D'où par hypothèse :

$$A \in \mathbb{F}$$

ce qui est contradictoire, donc $\mathbb{E}\backslash\mathbb{F}$ est ouvert et par conséquent $\mathbb{F}$ fermé

10) <u>Distance d'un point à un sous-ensemble</u>

Soit $\mathbb{G}$ une partie de $\mathbb{E}$ et $\boldsymbol{A}$ un point de $\mathbb{E}$. On définit la distance de $\boldsymbol{A}$ à $\mathbb{G}$ par :

$$\boldsymbol{d(A, \mathbb{G}) = \inf\{d(A, B) :\ B \in \mathbb{G}\}}$$

II Applications d'un espace métrique dans un autre

Dans toute la suite, $\mathbb{E}$ est un espace métrique associé à une distance d, $\mathbb{E}'$ un espace métrique associé à une distance d' et f une application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}'$

1) Notion de limite

On dit que f tend vers une limite L quand X tend vers A si :

$$\forall \boldsymbol{\varepsilon} \in]\mathbf{0}, +\infty[\ \exists \boldsymbol{\beta} \in]\mathbf{0}, +\infty[: \forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{E} : \boldsymbol{X} \in \mathbb{B}_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) \backslash \{\boldsymbol{A}\} \Rightarrow \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) \in \mathbb{B}_{\boldsymbol{d}'}(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{\varepsilon})$$

On écrira :

$$\lim_{X \to A} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{L}$$

2) Unicité de la limite

$$\left.\begin{aligned} \lim_{X \to A} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{L} \\ \lim_{X \to A} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{L}' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}'$$

<u>Preuve</u> :

$$d'(L, L') \leq d'\big(L, f(X)\big) + d'(f(X), L')$$

Pour tout $\varepsilon \in]0, +\infty[$:

$$\exists \beta_1 \in]0, +\infty[: \ \forall X \in \mathbb{B}_d(A, \beta_1) \backslash \{A\} : d'(L, f(X)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists \beta_2 \in]0, +\infty[: \ \forall X \in \mathbb{B}_d(A, \beta_2) \backslash \{A\} : d'(f(X), L') < \frac{\varepsilon}{2}$$

En prenant : $X = \max(\beta_1, \beta_2) + 1$

$$d'(L, L') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc :

$$d'(L, L') = 0$$

d'où :

$$L = L'$$

3) Propriété séquentielle de la limite

$$\lim_{X \to A} f(X) = L$$

équivaut à :

Pour toute suite (X_n) qui a pour limite A, la suite $\big(f(X_n)\big)$ a pour limite L

Preuve :

Sens direct :

On suppose :

$$\lim_{X \to A} f(X) = L$$

alors

Soit $\varepsilon \in]0, +\infty[$ alors :

$$\exists\, \beta \in]0, +\infty[\,:\, \forall\, X \in \mathbb{B}_d(A, \beta) \backslash \{A\} : f(X) \in \mathbb{B}_{d'}(L, \varepsilon)$$

Pour $\beta > 0$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,:\, n > n_0 \Rightarrow X_n \in \mathbb{B}_d(A, \beta) \Rightarrow f(X_n) \in \mathbb{B}_{d'}(L, \varepsilon)$$

Sens réciproque :

On suppose que pour toute suite (X_n) ayant pour limite A, la suite $\big(f(X_n)\big)$ a pour limite L.

Supposons par l'absurde :

$$\lim_{X \to A} f(X) \neq L$$

Alors :

$$\exists\, \varepsilon_1 \in]0, +\infty[\,:\, \forall\, \beta \in]0, +\infty[\,:\, f(\mathbb{B}_d(A, \beta)) \not\subset \mathbb{B}_{d'}(L, \varepsilon_1)$$

En particulier donc, pour tout entier naturel non nul n :

$$f\left(\mathbb{B}_d\left(A,\frac{1}{n}\right)\right) \not\subset \mathbb{B}_{d'}(L,\varepsilon_1)$$

On peut donc construire une suite X_n d'éléments de $\mathbb{E}$ telle que :

$$d(X_n,A) < \frac{1}{n}$$

$$d(f(X_n),L) \geq \varepsilon_1$$

La première relation montre que X_n tend vers A et la seconde rend absurde le fait que $f(X_n)$ tende vers L.

On a donc bien :

$$\lim_{X\to A} f(X) = L$$

4) Continuité

On dit que $\boldsymbol{f}$ est continue en $\boldsymbol{A}$ si : $$\lim_{X\to A} \boldsymbol{f(X) = f(A)}$$

5) Composée

Soit g une application d'un espace métrique $(\mathbb{E},d)$ dans un espace métrique $(\mathbb{E}',d')$ et f une application de $(\mathbb{E}',d')$ dans un espace métrique $(\mathbb{E}'',d")$

Si $$\lim_{X\to A} \boldsymbol{g(X) = L}$$ **$\boldsymbol{f}$ continue en $\boldsymbol{L}$**   **alors** $$\lim_{X\to A} \boldsymbol{f\big(g(X)\big) = f(L)}$$

Preuve :

Soit $\varepsilon \in \,]0,+\infty[$ alors :

$$\exists\ \beta \in]0, +\infty[\ :\ \forall\ Y\ \in \mathbb{B}_{d'}(L, \beta) : f(Y) \in \mathbb{B}_{d''}(f(L), \varepsilon)$$

Pour $\beta > 0$:

$\exists\ \gamma \in]0, +\infty[\ :\ \forall\ X\ \in \mathbb{B}_{d}(A, \gamma)\backslash\{A\} : g(X) \in \mathbb{B}_{d'}(L, \beta)$ donc $f(g(X)) \in \mathbb{B}_{d''}(f(L), \varepsilon)$

6) **<u>Réciproque, d'un fonction continue, homéomorphisme</u>** :

Supposons que f soit une application bijective de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}'$ et continue sur $\mathbb{E}$, alors sa réciproque f^{-1} n'est pas nécessairement continue sur $\mathbb{E}'$, comme le montre l'exemple simple suivant :

$$\mathbb{E} = [0; 1[\ \cup [2; 3]$$

$$\mathbb{E}' = [0; 2]$$

$$f(x) = x \text{ sur } [0; 1[\,, \qquad x - 1\ sur\ [2; 3]$$

d et d' étant les distances usuelles associées à la valeur absolue.

Nous avons en effet clairement :

$$\lim_{y \to 1^+} f^{-1}(y) = 2$$

$$\lim_{y \to 1^-} f^{-1}(y) = 1$$

Donc f^{-1} n'est pas continue en 1.

On définit donc la notion d'homéomorphisme comme suit :

Une application f continue de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}'$ telle que f^{-1} soit continue (on dit encore f bi-continue) est qualifiée d'homéomorphisme de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}'$.

Nous allons voir que, sous certaines hypothèses de compacité de $\mathbb{E}$, la continuité de f sur $\mathbb{E}$ entraîne celle de f^{-1} sur $\mathbb{E}'$. Commençons donc par définir la compacité dans un espace métrique.

Un espace métrique $\mathbb{E}$ est dit compact si de toute suite d'éléments de $\mathbb{E}$ on peut extraire une sous suite convergente

Cette définition élargit celle donnée pour les parties fermées bornées de $\mathbb{R}^n$ qui sont les seules à posséder cette propriété. Ainsi, dans $\mathbb{R}$, le compact de référence est le segment $[a;b]$ dont le caractère compact est obtenu par le théorème de Bolzano-Weierstrass, que nous avons présenté dans le fichier sur les suites numériques.

Le théorème essentiel sur la continuité d'une réciproque en découle :

Soit $\boldsymbol{f}$ une application continue et bijective d'un espace métrique compact $(\mathbb{E},\boldsymbol{d})$ dans un espace métrique $(\mathbb{E}',\boldsymbol{d}')$ quelconque

Alors $\boldsymbol{f}^{-1}$ est continue sur $\mathbb{E}'$, donc $\boldsymbol{f}$ définit un homéomorphisme de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{E}'$.

Preuve :

Supposons par l'absurde l'existence d'un point $B=f(A)$ en lequel f^{-1} n'est pas continue. Alors :

$$\exists\ \varepsilon_1 \in\ ]0,+\infty[\ :\ \forall\ \beta \in\ ]0,+\infty[\ :\ f^{-1}(\mathbb{B}_{d'}(B,\beta)) \not\subset \mathbb{B}_d(f^{-1}(B),\varepsilon_1)$$

En particulier donc, pour tout entier naturel non nul n :

$$f^{-1}\left(\mathbb{B}_{d'}\left(B,\frac{1}{n}\right)\right) \not\subset \mathbb{B}_d(A,\varepsilon_1)$$

On peut donc construire une suite $Y_n=f(X_n)$ d'éléments de $\mathbb{E}'$ telle que :

$$d'(Y_n,B)<\frac{1}{n}$$

$$d(f^{-1}(Y_n),A)\geq \varepsilon_1$$

Soit :

$$d'(f(X_n)\,,B)<\frac{1}{n}$$

$$d(X_n,A)\geq \varepsilon_1$$

X_n étant une suite bornée d'un espace métrique compact, on peut en extraire une sous-suite qui converge vers une limite L. Par passage à la limite dans les relations ci-dessus exprimées pour la sous-suite et continuité de f, on en déduit :

$$d'(f(L)\,,B)=0$$

$$d(L, A) \geq \varepsilon_1$$

donc :

$$f(L) = B$$

$$L \neq A$$

Or :

$$f(A) = B$$

B a donc deux antécédents distincts, ce qui est contradictoire

Remarque :

Dans l'exemple donné $\mathbb{E} = [0; 1[\cup [2; 3]$ n'est pas compact car il n'est pas fermé. En effet, la suite :

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

converge vers1, donc toute suite extraite également, et 1 n'est pas dans $\mathbb{E}$.