

# Topologie des espaces vectoriels normés

**(FICHER EN COURS D'ELABORATION)**

## **I Notion de norme, et de distance associée**

### 1) **Rappel** :

Nous avons défini sur l'ensemble  $\mathbb{V}$  des vecteurs d'un plan muni d'un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  la norme euclidienne d'un vecteur :

$$\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$$

par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nous avons défini une notion analogue sur l'ensemble  $\mathbb{V}$  des vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :

$$\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

### 2) **Propriétés caractéristiques de la norme euclidienne**

La **norme euclidienne** vérifie les propriétés :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \lambda) \in \mathbb{V}^2 \times \mathbb{R} : \begin{cases} \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \\ \|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\| \\ \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \end{cases}$$

Redémontrons la dernière, appelée inégalité triangulaire, car le procédé sera utilisé pour démontrer une propriété plus générale appelée inégalité de Schwartz :

Nous avons pour tout réel  $t$  :

$$\|t \vec{u} + \vec{v}\|^2 \geq 0$$

Notons :

$$\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$$\vec{v} = x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}$$

alors :

$$t \vec{u} + \vec{v} = (t x + x') \vec{i} + (t y + y') \vec{j} + (t z + z') \vec{k}$$

Donc :

$$(t x + x')^2 + (t y + y')^2 + (t z + z')^2 \geq 0$$

D'où en développant et en regroupant :

$$(x^2 + y^2 + z^2)t^2 + 2(x x' + y y' + z z')t + (x'^2 + y'^2 + z'^2) \geq 0$$

L'expression ci-dessus, vue comme un trinôme en la variable  $t$ , est de signe constant ou nul. Son discriminant est donc négatif ou nul, d'où :

$$4(x x' + y y' + z z')^2 - 4(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) \leq 0$$

Ainsi :

$$|x x' + y y' + z z'| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

A noter qu'en faisant intervenir le produit scalaire, cela s'écrit :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

Nous avons alors, en faisant  $t = 1$  :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + 2(x x' + y y' + z z') + (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

Donc :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2 \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$$

Soit :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

Finalement :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

### 3) Distance associée à la norme euclidienne

La norme euclidienne permet de définir naturellement une distance entre deux vecteurs de l'espace par exemple. Ainsi, on posera :

$$d_2(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Soit pour :

$$\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

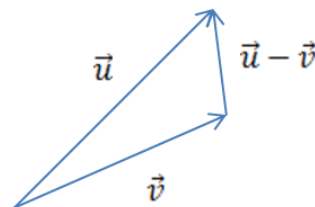
$$\vec{v} = x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}$$

dans une base orthonormée :

$$d_2(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

Cette distance est qualifiée de **distance euclidienne** ou **distance quadratique**.

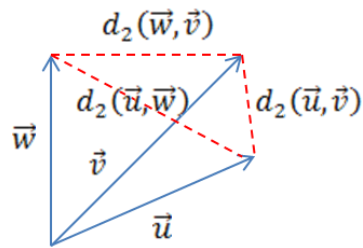
A noter que cette notion de distance est très naturelle, car l'idée intuitive qu'on peut se faire de la proximité de deux vecteurs est que leur différence soit un vecteur de faible norme (voir figure ci-dessous)



### 4) Propriétés de la distance associée à la norme euclidienne

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{V}^2 \times \mathbb{R} : \begin{cases} d_2(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \\ d_2(\vec{u}, \vec{v}) = d_2(\vec{v}, \vec{u}) \\ d_2(\vec{u}, \vec{v}) \leq d_2(\vec{u}, \vec{w}) + d_2(\vec{w}, \vec{v}) \end{cases}$$

La seconde propriété est appelée symétrie, la dernière, inégalité triangulaire, pour une raison évidente apparaissant sur la figure ci-dessous :



Preuve :

Les deux premières propriétés sont triviales. Voyons la troisième :

$$d_2(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \|(\vec{u} - \vec{w}) + (\vec{w} - \vec{v})\|$$

donc :

$$d_2(\vec{u}, \vec{v}) \leq \|\vec{u} - \vec{w}\| + \|\vec{w} - \vec{v}\|$$

soit :

$$d_2(\vec{u}, \vec{v}) \leq d_2(\vec{u}, \vec{w}) + d_2(\vec{w}, \vec{v})$$

## II Notion générale de norme et distance associée

### 1) Norme

Soit  $\mathbb{V}$  un espace vectoriel quelconque sur le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et soit une application de  $\mathbb{V}$  dans l'ensemble des réels positifs ou nuls :

$$\begin{aligned} N : \mathbb{V} &\rightarrow [0; +\infty[ \\ \vec{u} &\rightarrow N(\vec{u}) \end{aligned}$$

Alors  $N$  est qualifiée de norme si elle vérifie :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \lambda) \in \mathbb{V}^2 \times \mathbb{R} : \begin{cases} N(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \\ N(\lambda \vec{u}) = |\lambda| N(\vec{u}) \\ N(\vec{u} + \vec{v}) \leq N(\vec{u}) + N(\vec{v}) \end{cases}$$

Une norme a la propriété :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{V}^2 : |N(\vec{u}) - N(\vec{v})| \leq N(\vec{u} - \vec{v})$$

Preuve :

$$N(\vec{u}) = N((\vec{u} + \vec{v}) - \vec{v}) \leq N(\vec{u} + \vec{v}) + N(\vec{v})$$

donc :

$$N(\vec{u}) - N(\vec{v}) \leq N(\vec{u} + \vec{v})$$

De même :

$$N(\vec{v}) - N(\vec{u}) \leq N(\vec{u} + \vec{v})$$

Il en résulte la propriété

## 2) Distance associée à une norme

On définit pour une norme  $N$ , une distance associée par :

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = N(\vec{u} - \vec{v})$$

et cette distance a les propriétés :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{V}^2 \times \mathbb{R} : \begin{cases} d(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \\ d(\vec{u}, \vec{v}) = d(\vec{v}, \vec{u}) \\ d(\vec{u}, \vec{v}) \leq d(\vec{u}, \vec{w}) + d(\vec{w}, \vec{v}) \end{cases}$$

Preuves :

Elle sont analogues à celles pour la distance euclidienne

## 3) Exemples de normes dans des espaces vectoriels de dimension finie

La norme euclidienne est une norme sur l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace.

Elle conduit à définir une norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$  de façon naturelle, par :

$$N_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0; +\infty[ \\ \vec{u} = (x, y) \rightarrow N_2(\vec{u}) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Mais nous pouvons définir deux autres normes sur ce même espace vectoriel :

$$N_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0; +\infty[ \\ \vec{u} = (x, y) \rightarrow N_1(\vec{u}) = |x| + |y|$$

$$N_\infty : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0; +\infty[ \\ \vec{u} = (x, y) \rightarrow N_\infty(\vec{u}) = \sup(|x|, |y|)$$

Vérifions que les deux dernières sont bien des normes :

En effet, pour  $\vec{u} = (x, y)$ ,  $\vec{v} = (x', y')$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$N_1(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow |x| + |y| = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

$$N_1(\lambda \vec{u}) = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda| (|x| + |y|) = |\lambda| N_1(\vec{u})$$

$$N_1(\vec{u} + \vec{v}) = |x + x'| + |y + y'| \leq |x| + |x'| + |y| + |y'| = N_1(\vec{u}) + N_1(\vec{v})$$

$$N_\infty(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \sup(|x|, |y|) = 0 \Leftrightarrow |x| = |y| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

$$N_\infty(\lambda \vec{u}) = \sup(|\lambda x|, |\lambda y|) = |\lambda| \sup(|x|, |y|) = |\lambda| N_\infty(\vec{u})$$

$$N_\infty(\vec{u} + \vec{v}) = \sup(|x + x'|, |y + y'|) \leq \sup(|x| + |x'|, |y| + |y'|) \\ \leq \sup(|x|, |y|) + \sup(|x'|, |y'|) = N_\infty(\vec{u}) + N_\infty(\vec{v})$$

Plus généralement, des preuves totalement analogues montreraient qu'on peut définir sur  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) les trois normes suivantes :

$$N_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0; +\infty[ \\ \vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow N_2(\vec{u}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Cette dernière est qualifiée de norme euclidienne

$$N_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0; +\infty[ \\ \vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow N_1(\vec{u}) = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$N_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow [0; +\infty[ \\ \vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow N_\infty(\vec{u}) = \sup(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$$

Mais pour être plus général encore, on peut définir des normes de référence analogues sur un espace vectoriel  $\mathbb{V}$  de dimension finie  $n$ , associées à une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$

$$N_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0; +\infty[$$

$$\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \rightarrow N_2(\vec{u}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Cette dernière est qualifiée de norme euclidienne

$$N_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0; +\infty[$$

$$\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \rightarrow N_1(\vec{u}) = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$N_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow [0; +\infty[$$

$$\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \rightarrow N_\infty(\vec{u}) = \sup(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$$

#### 4) Exemples de normes dans un espace vectoriel de dimension non finie

Soit  $\mathbb{V} = C_0[a; b]$  l'espace vectoriel des fonctions continue sur  $[a; b]$ . On peut alors définir trois normes apparentées aux précédentes :

$$N_2 : C_0[a; b] \rightarrow [0; +\infty[$$

$$f \rightarrow N_2(f) = \sqrt{\int_a^b f(x) dx}$$

Cette dernière est qualifiée de norme euclidienne

$$N_1 : C_0[a; b] \rightarrow [0; +\infty[$$

$$f \rightarrow N_1(f) = \int_a^b |f(x)| dx$$

$$N_\infty : C_0[a; b] \rightarrow [0; +\infty[$$

$$f \rightarrow N_\infty(f) = \sup \{|f(x)| : x \in [a; b]\}$$

Preuves :

Elles sont aisées en procédant de façon analogue aux précédentes.

### III Produit scalaire

#### 1) Définition

Soit  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel sur lequel est définie une application du type :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\rightarrow f(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

On dit que  $f$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{V}$  si elle vérifie les quatre propriétés :

- $f$  est bilinéaire :

$$\begin{aligned} \forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \alpha, \beta) \in \mathbb{V}^3 \times \mathbb{R}^2: \\ f(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}, \vec{w}) &= \alpha f(\vec{u}, \vec{w}) + \beta f(\vec{v}, \vec{w}) \\ f(\vec{w}, \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) &= \alpha f(\vec{w}, \vec{u}) + \beta f(\vec{w}, \vec{v}) \end{aligned}$$

autrement dit  $f$  est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables

- $f$  est symétrique :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{V}^2 : f(\vec{v}, \vec{u}) = f(\vec{u}, \vec{v})$$

- $f$  est définie :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{V} : f(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

- $f$  est positive :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{V} : f(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$$

#### 2) Inégalité de Schwartz

Soit  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel sur lequel est défini un produit scalaire :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\rightarrow f(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$



alors

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{V}^2 : |f(\vec{u}, \vec{v})| \leq \sqrt{f(\vec{u}, \vec{u})} \sqrt{f(\vec{v}, \vec{v})}$$

avec égalité si et seulement si la partie  $(\vec{u}, \vec{v})$  est liée

Preuve :

Le fait que  $f$  soit positive donne pour tout réel  $t$  :

$$f(t\vec{u} + \vec{v}, t\vec{u} + \vec{v}) \geq 0$$

Soit, en appliquant la bilinéarité et la symétrie :

$$f(\vec{u}, \vec{u}) t^2 + 2 f(\vec{u}, \vec{v}) t + f(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$$

Nous sommes donc en présence d'un trinôme en  $t$  de signe constant ou nul, donc le discriminant de l'expression est négatif ou nul, soit :

$$4 (f(\vec{u}, \vec{v}))^2 - 4 f(\vec{u}, \vec{u}) f(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$$

d'où :

$$(f(\vec{u}, \vec{v}))^2 \leq f(\vec{u}, \vec{u}) f(\vec{v}, \vec{v})$$

Puis, en prenant la racine :

$$|f(\vec{u}, \vec{v})| \leq \sqrt{f(\vec{u}, \vec{u})} \sqrt{f(\vec{v}, \vec{v})}$$

Examinons maintenant le cas d'égalité.

Supposons en premier  $f(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0$  alors le trinôme précédent a un discriminant nul donc a une racine double  $t_0$ . On a alors :

$$f(t_0\vec{u} + \vec{v}, t_0\vec{u} + \vec{v}) = 0$$

Le caractère défini de  $f$  donne alors :

$$t_0\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$$

donc  $(\vec{u}, \vec{v})$  liée

Supposons en second  $f(\vec{u}, \vec{v}) \leq 0$  alors  $f(-\vec{u}, \vec{v}) \geq 0$  et donc

$$f(-\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{f(-\vec{u}, -\vec{u})} \sqrt{f(\vec{v}, \vec{v})}$$

donc  $(-\vec{u}, \vec{v})$  liée d'où  $(\vec{u}, \vec{v})$  liée

### 3) Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

On peut définir sur  $\mathbb{R}^n$  le produit scalaire suivant :

$$f : (\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)) \rightarrow f(\vec{u}, \vec{v}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

L'inégalité de Schwartz se traduit alors par :

$$\forall (\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2 :$$
$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$$

**avec égalité si et seulement si la partie  $(\vec{u}, \vec{v})$  est liée**

En particulier, en prenant  $\vec{u} = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_n) = (1, 1, \dots, 1)$

$$\forall \vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n :$$
$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq \sqrt{n} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

**Soit :**

$$N_1(\vec{u}) \leq \sqrt{n} N_2(\vec{u})$$

### 4) Norme associée à un produit scalaire :

Soit  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel sur lequel est définie un produit scalaire :

$$f : \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow f(\vec{u}, \vec{v})$$

alors l'application suivante est une norme :

$$N : \mathbb{V} \rightarrow [0; +\infty[$$
$$\vec{u} \rightarrow N(\vec{u}) = \sqrt{f(\vec{u}, \vec{u})}$$

Preuve :

Soit  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{V}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors :

$$N(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow f(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

$$N(\lambda \vec{u}) = \sqrt{f(\lambda \vec{u}, \lambda \vec{u})} = \sqrt{\lambda^2 f(\vec{u}, \vec{u})} = |\lambda| \sqrt{f(\vec{u}, \vec{u})} = |\lambda| N(\vec{u})$$

$$\begin{aligned} (N(\vec{u} + \vec{v}))^2 &= f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}, \vec{u}) + f(\vec{u}, \vec{v}) + f(\vec{v}, \vec{u}) + f(\vec{v}, \vec{v}) \\ &= (N(\vec{u}))^2 + 2 f(\vec{u}, \vec{v}) + (N(\vec{v}))^2 \end{aligned}$$

L'inégalité de Schwartz donne alors :

$$(N(\vec{u} + \vec{v}))^2 \leq (N(\vec{u}))^2 + 2 N(\vec{u})N(\vec{v}) + (N(\vec{v}))^2 = (N(\vec{u}) + N(\vec{v}))^2$$

D'où :

$$N(\vec{u} + \vec{v}) \leq N(\vec{u}) + N(\vec{v})$$

Remarque :

L'inégalité de Schwartz se traduit alors par :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{V}^2 : |f(\vec{u}, \vec{v})| \leq N(\vec{u}) N(\vec{v})$$

avec égalité si et seulement si la partie  $(\vec{u}, \vec{v})$  est liée

## IV Normes équivalentes

### 1) Définition

Soit  $\mathbb{V}$  un espace vectoriel sur lequel sont définies deux normes  $N$  et  $N'$ . On dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe deux réels strictement positifs  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{V} : \alpha N(\vec{u}) \leq N'(\vec{u}) \leq \beta N(\vec{u})$$

On écrira :

$$N \sim N'$$

Cette relation sur les normes est une relation d'équivalence, elle est :

- réflexive :

$$N \sim N$$

- symétrique :

$$N \sim N' \Rightarrow N' \sim N$$

- transitive :

$$N \sim N' \text{ et } N' \sim N'' \Rightarrow N \sim N''$$

Preuves :

Le caractère réflexif est évident car :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{V} : N(\vec{u}) \leq N(\vec{u}) \leq N(\vec{u})$$

Le caractère symétrique vient de ce fait :

Si :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{V} : \alpha N(\vec{u}) \leq N'(\vec{u}) \leq \beta N(\vec{u})$$

alors :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{V} : \frac{1}{\beta} N'(\vec{u}) \leq N(\vec{u}) \leq \frac{1}{\alpha} N'(\vec{u})$$

et le caractère transitif :

Si :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{V} : \begin{cases} \alpha N(\vec{u}) \leq N'(\vec{u}) \leq \beta N(\vec{u}) \\ \gamma N'(\vec{u}) \leq N''(\vec{u}) \leq \delta N'(\vec{u}) \end{cases}$$

alors :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{V} : \gamma \alpha N(\vec{u}) \leq N''(\vec{u}) \leq \delta \beta N(\vec{u})$$

## 2) Théorème sur les normes en dimension finie

Soit  $\mathbb{V}$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ , alors toutes les normes sont équivalentes.

En particulier, si  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  est une base de  $\mathbb{V}$ , les trois normes de référence associées à cette base vérifient :

$$N_{\infty}(\vec{u}) \leq N_1(\vec{u}) \leq \sqrt{n} N_2(\vec{u}) \leq n N_{\infty}(\vec{u})$$

Preuve :

Commençons par la dernière propriété qui est relativement simple :

Posons :

$$\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

alors :

$$\begin{aligned} \sup(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) &\leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq \sqrt{n} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ &\leq \sqrt{n} \sqrt{n \sup(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)} = n \sup(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \end{aligned}$$

Ce qui établit la propriété.

Soit alors une norme  $N$  sur  $\mathbb{V}$ , démontrons qu'elle est équivalente à la norme  $N_1$  :

Soit :

$$\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

alors :

$$\begin{aligned} N(\vec{u}) &\leq N(x_1 \vec{e}_1) + N(x_2 \vec{e}_2) + \dots + N(x_n \vec{e}_n) \\ N(\vec{u}) &\leq |x_1|N(\vec{e}_1) + |x_2|N(\vec{e}_2) + \dots + |x_n|N(\vec{e}_n) \end{aligned}$$

Notons :

$$\beta = \sup(N(\vec{e}_1), N(\vec{e}_2), \dots, N(\vec{e}_n))$$

Alors :

$$N(\vec{u}) \leq \beta (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) = \beta N_1(\vec{u})$$

Reste à établir une minoration. Pour cela, notons que pour  $\vec{u} \neq \vec{0}$  :

$$\alpha N_1(\vec{u}) \leq N(\vec{u}) \Leftrightarrow \alpha \leq N\left(\frac{1}{N_1(\vec{u})} \vec{u}\right)$$

Or :

$$N_1\left(\frac{1}{N_1(\vec{u})} \vec{u}\right) = \frac{1}{N_1(\vec{u})} N_1(\vec{u}) = 1$$

Autrement dit, nous sommes ramenés à montrer que l'application norme  $N$  est minorée par un réel strictement positif  $\alpha$  sur la « sphère de rayon 1 » associée à la norme  $N_1$  à savoir :

$$\mathbb{S}_1 = \{\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \in \mathbb{V} : |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = 1\}$$

Posons :

$$\alpha = \inf\{N(\vec{u}) : \vec{u} \in \mathbb{S}_1\} \geq 0$$

Nous allons montrer que  $\alpha$  est la norme  $N$  d'un vecteur de  $\mathbb{S}_1$ .

Pour tout entier naturel non nul  $p$  nous avons :

$$\exists \vec{u}_p = x_{1p} \vec{e}_1 + x_{2p} \vec{e}_2 + \dots + x_{np} \vec{e}_n \in \mathbb{S}_1 : \alpha \leq N(\vec{u}_p) < \alpha + \frac{1}{p}$$

soit :

$$|x_{1p}| + |x_{2p}| + \dots + |x_{np}| = 1$$

Les suites  $(x_{kp})$  pour  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  vérifient donc

$$|x_{kp}| \leq 1$$

et sont de ce fait bornées, on peut donc extraire des suites  $(x_{kg(p)})$  qui sont convergentes vers des réels  $a_k$ .

Or :

$$|x_{1g(p)}| + |x_{2g(p)}| + \dots + |x_{ng(p)}| = 1$$

Par passage à la limite, on en déduit :

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = 1$$

Donc le vecteur  $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n$  est dans  $\mathbb{S}_1$ .

En outre :

$$\begin{aligned} |N(\vec{u}_{g(p)}) - N(\vec{a})| &\leq N(\vec{u}_{g(p)} - \vec{a}) \\ &\leq \beta (|x_{1g(p)} - a_1| + |x_{2g(p)} - a_2| + \dots + |x_{ng(p)} - a_n|) \end{aligned}$$

Le théorème des gendarmes montre alors que l'on a :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} N(\vec{u}_{g(p)}) = N(\vec{a})$$

Mais par l'encadrement :

$$\alpha \leq N(\vec{u}_{g(p)}) < \alpha + \frac{1}{g(p)}$$

il donne également :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} N(\vec{u}_{g(p)}) = \alpha$$

On en déduit

$$\alpha = N(\vec{a})$$

Or  $\vec{a} \neq \vec{0}$  donc  $N(\vec{a}) \neq 0$  d'où  $\alpha \neq 0$  donc  $\alpha > 0$

On peut alors conclure :

Soit  $\vec{u} \neq \vec{0}$  alors :

$$\frac{1}{N_1(\vec{u})} \vec{u} \in \mathbb{S}_1$$

Donc :

$$\alpha \leq N\left(\frac{1}{N_1(\vec{u})} \vec{u}\right) = \frac{N(\vec{u})}{N_1(\vec{u})}$$

D'où :

$$\alpha N_1(\vec{u}) \leq N(\vec{u})$$

Finalement :

$$N \sim N_1$$

## V Topologie des espaces vectoriels normés

Dans toute la suite,  $\mathbb{E}$  désigne un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension quelconque et  $N$  une norme sur cet espace.

### 1) Boules ouvertes, boules fermées, sphères

Soit  $\vec{a} \in \mathbb{E}$  et  $\beta \in ]0; +\infty[$

La boule ouverte de centre  $\vec{a}$  et de rayon  $\beta$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{E}$  :

$$\mathbb{B}(\vec{a}, \beta) = \{\vec{u} \in \mathbb{E} : N(\vec{u} - \vec{a}) < \beta\}$$

La boule fermée de centre  $\vec{a}$  et de rayon  $\beta$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{V}$  :

$$\mathbb{B}'(\vec{a}, \beta) = \{\vec{u} \in \mathbb{E} : N(\vec{u} - \vec{a}) \leq \beta\}$$

La sphère de centre  $\vec{a}$  et de rayon  $\beta$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{V}$  :

$$\mathbb{S}(\vec{a}, \beta) = \{\vec{u} \in \mathbb{E} : N(\vec{u} - \vec{a}) = \beta\}$$

Exemples :

1)  $\mathbb{E} = \mathbb{R}$

Pour la norme  $N(x) = |x|$  :

$$\mathbb{B}(a, \beta) = ]a - \beta; a + \beta[$$

$$\mathbb{B}'(a, \beta) = [a - \beta; a + \beta]$$

$$\mathbb{S}(a, \beta) = \{a - \beta; a + \beta\}$$



2)  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$   $A = (a, b)$

Pour la norme  $N_1$  :

$$\mathbb{B}(A, \beta) = L(A, \beta)$$

Sa représentation dans un plan est un carré de centre  $A$  privé de son bord

Pour la norme  $N_2$  :

$$\mathbb{B}(A, \beta) = \{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 < \beta\}$$

Sa représentation dans un plan est un disque privé de son bord de centre  $A$  et de rayon  $\beta$

Pour la norme  $N_\infty$  :

$$\mathbb{B}(A, \beta) = C(A, \beta)$$

Sa représentation dans un plan est un carré de centre  $A$  privé de son bord

1)  $\mathbb{V} = \mathbb{E}^3$   $A = (a, b, c)$

Pour la norme  $N_1$  :

$$\mathbb{B}(A, \beta)$$

Sa représentation dans un plan est un cube de centre  $A$  privé de son bord

Pour la norme  $N_2$  :

$$\mathbb{B}(A, \beta) = \{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < \beta\}$$

Sa représentation dans un plan est une boule privée de son bord de centre  $A$  et de rayon  $\beta$

Pour la norme  $N_\infty$  :

$$\mathbb{B}(A, \beta) = C(A, \beta)$$

Sa représentation dans un plan est un cube de centre  $A$  privé de son bord

## 2) Voisinage d'un point

Soit une partie  $V$  de  $\mathbb{E}$ , et  $\vec{a}$  un vecteur de  $\mathbb{E}$ , on dit que cette partie est un voisinage de  $\vec{a}$  si elle contient une boule ouverte de centre  $\vec{a}$

Si on note  $\mathbb{V}(\vec{a})$  l'ensemble des voisinages de  $\vec{a}$ , la définition s'écrit :

$$V \in \mathbb{V}(\vec{a}) \Leftrightarrow \exists \beta \in ]0, +\infty[ : \mathbb{B}(\vec{a}, \beta) \subset V$$

## 3) Ouverts et fermés

Une partie  $\Omega$  de  $\mathbb{E}$  est dite ouverte si elle est voisinage de chacun de ses points.

Une partie  $F$  de  $\mathbb{E}$  est dite fermée si son complémentaire  $\mathbb{E} \setminus F$  est ouvert

## 4) Notion de limite d'une suite

Soit une suite  $(\vec{U}_n)$  de vecteurs de  $\mathbb{E}$  et. On dit que la suite a pour limite un vecteur  $\vec{a}$  de  $\mathbb{E}$  si :

$$\forall \varepsilon \in ]0, +\infty[ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow \vec{U}_n \in \mathbb{B}(\vec{a}, \varepsilon)$$

On écrira :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{U}_n = \vec{a}$$

Notons que cette notion dépend a priori de la norme employée mais, si  $N$  et  $N'$  sont deux normes équivalentes sur  $\mathbb{E}$  alors, si une suite  $(\vec{U}_n)$  de vecteurs de  $\mathbb{E}$  converge vers un vecteur  $\vec{a}$  de  $\mathbb{E}$  pour la norme  $N$ , elle converge vers ce même vecteur  $\vec{a}$  pour la norme  $N'$

Preuve :

Nous avons :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{E} : \alpha N(\vec{u}) \leq N'(\vec{u}) \leq \beta N(\vec{u})$$

Donc pour tout  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$  :

$$N(\vec{u} - \vec{a}) < \varepsilon \Rightarrow N'(\vec{u} - \vec{a}) < \beta \varepsilon$$

soit :

$$\mathbb{B}_N(\vec{a}, \varepsilon) \subset \mathbb{B}_{N'}(\vec{a}, \beta \varepsilon)$$

De même :

$$\mathbb{B}_{N'}(\vec{a}, \varepsilon) \subset \mathbb{B}_N\left(\vec{a}, \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)$$

La propriété s'en déduit aisément

### 5) Unicité de la limite

Si une suite  $(\vec{U}_n)$  de vecteurs de  $\mathbb{E}$  converge vers un vecteur  $\vec{a}$  de  $\mathbb{E}$  et un vecteur  $\vec{b}$  de  $\mathbb{E}$  alors  $\vec{a} = \vec{b}$

Preuve :

Soit  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$  alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow N(\vec{U}_n - \vec{a}) < \varepsilon$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow N(\vec{U}_n - \vec{b}) < \varepsilon$$

Or :

$$N(\vec{a} - \vec{b}) = N(\vec{a} - \vec{U}_n + \vec{U}_n - \vec{b}) \leq N(\vec{a} - \vec{U}_n) + N(\vec{U}_n - \vec{b})$$

En prenant :

$$n_2 = \max(n_0, n_1) + 1$$

on a :

$$N(\vec{a} - \vec{b}) < 2\varepsilon$$

donc :

$$N(\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

d'où :

$$\vec{a} = \vec{b}$$

### 6) Propriété de Cauchy et notion d'espace vectoriel normé complet

Si une suite  $(\vec{U}_n)$  de vecteurs de  $\mathbb{E}$  converge vers un vecteur  $\vec{a}$  de  $\mathbb{E}$  alors elle vérifie :

$$\forall \varepsilon \in ]0, +\infty[ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 : n > n_0 \Rightarrow N(\vec{U}_{n+m} - \vec{U}_n) < \varepsilon$$

Si la réciproque est vraie, l'espace vectoriel normé  $\mathbb{E}$  est dit complet pour la norme  $N$

Preuve :

$$N(\vec{U}_{n+m} - \vec{U}_n) = N(\vec{U}_{n+m} - \vec{a} + \vec{a} - \vec{U}_n) \leq N(\vec{U}_{n+m} - \vec{a}) + N(\vec{a} - \vec{U}_n)$$

Soit  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$  alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow N(\vec{U}_n - \vec{a}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 : n > n_0 \Rightarrow N(\vec{U}_{n+m} - \vec{U}_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

## 7) Propriétés de la limite vis-à-vis des opérations :

Soient  $(\vec{U}_n)$  et  $(\vec{V}_n)$  deux suites de vecteurs de  $\mathbb{E}$  et un réel  $\lambda$ , alors :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{U}_n = \vec{a} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{V}_n = \vec{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{U}_n + \vec{V}_n = \vec{a} + \vec{b} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda \vec{U}_n = \lambda \vec{a} \end{array} \right.$$

Preuve :

Notons que l'on a :

$$N((\vec{U}_n + \vec{V}_n) - (\vec{a} + \vec{b})) = N((\vec{U}_n - \vec{a}) + (\vec{V}_n - \vec{b})) \leq N(\vec{U}_n - \vec{a}) + N(\vec{V}_n - \vec{b})$$

Soit alors  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$  :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow \vec{U}_n \in \mathbb{B}\left(\vec{a}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow N(\vec{U}_n - \vec{a}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow \vec{V}_n \in \mathbb{B}\left(\vec{b}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow N(\vec{V}_n - \vec{b}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

En prenant :

$$n_2 = \max(n_0, n_1)$$

on a :

$$n > n_2 \Rightarrow N((\vec{U}_n + \vec{V}_n) - (\vec{a} + \vec{b})) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \vec{U}_n + \vec{V}_n \in \mathbb{B}(\vec{a} + \vec{b}, \varepsilon)$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{U}_n + \vec{V}_n = \vec{a} + \vec{b}$$

De façon analogue

$$N(\lambda \vec{U}_n - \lambda \vec{a}) = N(\lambda(\vec{U}_n - \vec{a})) = |\lambda| N(\vec{U}_n - \vec{a})$$

Donc pour  $\lambda \neq 0$  :

$$\exists n_3 \in \mathbb{N} : n > n_3 \Rightarrow \vec{U}_n \in \mathbb{B}\left(\vec{a}, \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right) \Rightarrow N(\vec{U}_n - \vec{a}) < \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \Rightarrow N(\lambda \vec{U}_n - \lambda \vec{a}) < \varepsilon$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda \vec{U}_n = \lambda \vec{a}$$

Pour  $\lambda = 0$  c'est trivial.

### 8) Caractérisation séquentielle des fermés

**Une partie  $\mathbb{F}$  de  $\mathbb{E}$  est fermée si et seulement si elle vérifie :**

**Pour toute suite  $\vec{U}_n$  de vecteurs de  $\mathbb{F}$  telle que  $\vec{U}_n$  converge vers une limite  $\vec{a}$ , cette limite appartient à  $\mathbb{F}$**

Preuve :

Sens direct

Soit une suite  $\vec{U}_n$  de vecteurs de  $\mathbb{F}$  telle que  $\vec{U}_n$  converge vers une limite  $\vec{a}$ . Supposons par l'absurde que  $\vec{a}$  ne soit pas dans  $\mathbb{F}$  alors il est dans son complémentaire qui est ouvert. Donc :

$$\exists \beta \in ]0; +\infty[ : \mathbb{B}(\vec{a}, \beta) \subset \mathbb{E} \setminus \mathbb{F}$$

Or :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow \vec{U}_n \in \mathbb{B}(\vec{a}, \beta) \Rightarrow \vec{U}_n \notin \mathbb{F}$$

Ceci est contradictoire donc  $\vec{a} \in \mathbb{F}$

Sens réciproque :

Supposons que pour toute suite  $\vec{U}_n$  de vecteurs de  $\mathbb{F}$  telle que  $\vec{U}_n$  converge vers une limite  $\vec{a}$ , cette limite appartienne à  $\mathbb{F}$ . Supposons par l'absurde que  $\mathbb{E} \setminus \mathbb{F}$  n'est pas ouvert. Alors il existe un vecteur  $\vec{a}$  de  $\mathbb{E} \setminus \mathbb{F}$  dont  $\mathbb{E} \setminus \mathbb{F}$  n'est pas un voisinage. Toute boule ouverte centrée sur  $\vec{a}$  contient alors au moins un vecteur de  $\mathbb{F}$ . Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \exists \vec{U}_n \in \mathbb{F} \cap \mathbb{B}\left(\vec{a}, \frac{1}{n}\right)$$

Soit alors  $\varepsilon \in ]0, +\infty[ :$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow N(\vec{U}_n - \vec{a}) < \varepsilon$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{U}_n = \vec{a}$$

D'où par hypothèse :

$$\vec{a} \in \mathbb{F}$$

ce qui est contradictoire, donc  $\mathbb{E} \setminus \mathbb{F}$  est ouvert et par conséquent  $\mathbb{F}$  fermé

### 9) Conséquence de la caractérisation séquentielle des fermés

**Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de  $\mathbb{E}$  est fermé et complet pour n'importe laquelle des normes définie sur  $\mathbb{E}$**

Preuve :

Soit  $\mathbb{F}$  un sous espace vectoriel de  $\mathbb{E}$  de dimension finie et soit une suite  $\vec{U}_n$  de vecteurs de  $\mathbb{F}$  ayant pour limite un vecteur  $\vec{a}$  de  $\mathbb{E}$ .

Soit  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$  une base de  $\mathbb{F}$ . Posons :

$$\vec{U}_n = x_{1n} \vec{e}_1 + x_{2n} \vec{e}_2 + \dots + x_{pn} \vec{e}_p$$

Toutes les normes étant équivalentes dans un espace vectoriel de dimension finie, la restriction  $N_{\mathbb{F}}$  au sous-espace  $\mathbb{F}$  de la norme  $N$  définie sur  $\mathbb{E}$  est de façon triviale une norme sur  $\mathbb{F}$  et est équivalente à la norme  $N_{\infty}$  définie sur ce sous-espace et pour la base considérée par, rappelons le :

$$N_{\infty}(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_p \vec{e}_p) = \sup(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|)$$

Le fait que  $\vec{U}_n$  ait pour limite  $\vec{a}$  pour la norme infinie entraîne qu'elle vérifie le critère de Cauchy, donc :

$$\forall \varepsilon \in ]0, +\infty[ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 :$$

$$n > n_0 \Rightarrow \sup(|x_{1(n+m)} - x_{1n}|, |x_{2(n+m)} - x_{2n}|, \dots, |x_{p(n+m)} - x_{pn}|) < \varepsilon$$

Donc les suites  $x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{pn}$  sont  $p$  suites de réels qui vérifient le critère de Cauchy. Elles sont donc convergentes. Notons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{1n} = a_1, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = a_2, \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{pn} = a_p$$

Et posons :

$$\vec{b} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_p \vec{e}_p$$

Nous avons :

$$\forall \varepsilon \in ]0, +\infty[ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow \sup(|x_{1n} - a_1|, |x_{2n} - a_2|, \dots, |x_{pn} - a_p|) < \varepsilon$$

Donc  $\vec{U}_n$  a pour limite  $\vec{b}$  pour la norme  $N_\infty$  donc pour la norme  $N_{\mathbb{F}}$  et donc  $N$ . Par unicité de la limite, on en déduit que :

$$\vec{b} = \vec{a}$$

Donc :

$$\vec{a} \in \mathbb{F}$$

$\mathbb{F}$  est donc fermé.

La démonstration a prouvé au passage que toute suite de  $\mathbb{F}$  vérifiant la propriété de Cauchy pour la norme  $N$  était convergente dans  $\mathbb{F}$  donc  $\mathbb{F}$  est complet pour  $N_{\mathbb{F}}$  ou toute norme définie sur lui.

### **10) Distance d'un vecteur à un sous-ensemble**

**Soit  $\mathbb{A}$  une partie de  $\mathbb{E}$  et  $\vec{a}$  un vecteur de  $\mathbb{E}$ . On définit la distance de  $\vec{a}$  à  $\mathbb{A}$  par :**

$$d(\vec{a}, \mathbb{A}) = \inf\{N(\vec{u} - \vec{a}) : \vec{u} \in \mathbb{A}\}$$

Propriété :

**Dans le cas où  $\mathbb{E}$  est de dimension finie :**

**Si  $\mathbb{F}$  est une partie fermée de  $\mathbb{E}$ , si  $\vec{a}$  un vecteur de  $\mathbb{E}$  alors :**

$$\exists \vec{b} \in \mathbb{F} : d(\vec{a}, \mathbb{F}) = N(\vec{b} - \vec{a}) = d(\vec{a}, \vec{b})$$

Preuve :

Notons :

$$c = d(\vec{a}, \mathbb{F})$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \exists \vec{U}_n \in \mathbb{F} : c \leq N(\vec{U}_n - \vec{a}) < c + \frac{1}{n}$$

Or :



$$N_\infty(\vec{U}_n) \leq N_\infty(\vec{U}_n - \vec{a}) + N_\infty(\vec{a}) < c + \frac{1}{n} + N_\infty(\vec{a}) \leq c + 1 + N_\infty(\vec{a})$$

Donc  $\vec{U}_n$  est une suite bornée pour  $N_\infty$ .

Soit  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$  une base de  $\mathbb{E}$ . Posons :

$$\vec{U}_n = x_{1n} \vec{e}_1 + x_{2n} \vec{e}_2 + \dots + x_{pn} \vec{e}_p$$

Donc les suites  $x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{pn}$  sont  $p$  suites bornées de réels, on peut donc en extraire  $p$  sous-suites convergentes.

Notons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{1n} = b_1, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = b_2, \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{pn} = b_p$$

Et posons :

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + \dots + b_p \vec{e}_p$$

$\vec{U}_n$  est une suite ayant pour limite  $\vec{b}$  pour  $N_\infty$  donc  $\vec{b} \in \mathbb{F}$  car  $\mathbb{F}$  est fermé.

$N$  et  $N_\infty$  étant équivalentes,  $\vec{U}_n$  a pour limite  $\vec{b}$  pour la norme  $N$ .

Or l'encadrement :

$$c \leq N(\vec{U}_n - \vec{a}) < c + \frac{1}{n}$$

montre, par le théorème des gendarmes, que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N(\vec{U}_n - \vec{a}) = c$$

Or :

$$|N(\vec{U}_n - \vec{a}) - N(\vec{b} - \vec{a})| \leq N((\vec{U}_n - \vec{a}) - (\vec{b} - \vec{a})) = N(\vec{U}_n - \vec{b})$$

et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N(\vec{U}_n - \vec{b}) = 0$$

On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N(\vec{U}_n - \vec{a}) = N(\vec{b} - \vec{a})$$

D'où :

$$c = N(\vec{b} - \vec{a})$$

## 11) Continuité de la réciproque

**Soit  $f$  une application continue et bijective d'une partie  $\mathbb{F}$  fermée bornée (d'un espace vectoriel normé  $\mathbb{E}$  de dimension finie, sur lequel est définie une distance  $d$  associée à une norme  $N$ , dans un espace métrique  $\mathbb{E}'$  muni d'une distance  $d'$**

**Alors  $f^{-1}$  est continue sur  $\mathbb{E}'$ , donc  $f$  définit un homéomorphisme de  $\mathbb{F}$  sur  $\mathbb{E}'$ .**

Remarque :

La continuité de  $f$  est définie pour la métrique dite induite par  $\mathbb{E}$ , qui est la distance  $d_{\mathbb{F}}$  définie sur  $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$  par :

$$d_{\mathbb{F}}(X, Y) = d(X, Y) = N(X - Y)$$

Preuve :

C'est la conséquence d'un résultat obtenu de façon générale sur les espaces métriques compacts, car les parties compactes d'un espace vectoriel de dimension finie sont, comme celles de  $\mathbb{R}^n$ , les parties fermées et bornées.