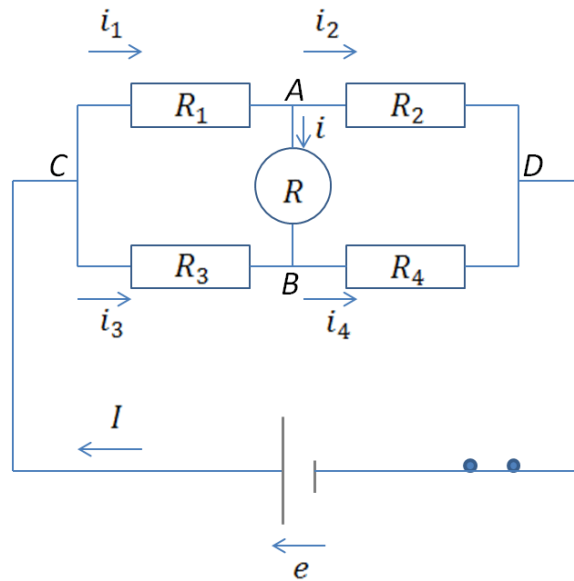


Théorème de Thévenin- Pont de Wheatstone

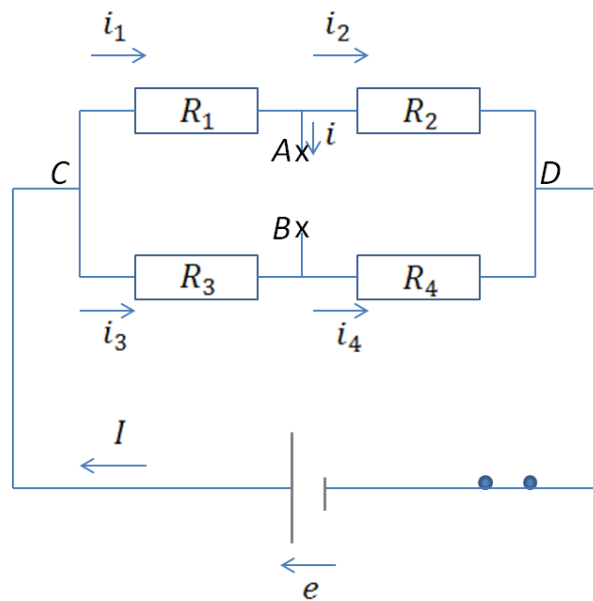
I Pont de Wheatstone

Considérons le circuit suivant qualifié de pont de Wheatstone :



Un galvanomètre de résistance R mesure le courant i allant du nœud A au nœud B . Nous allons déterminer une relation entre les résistances R_1, R_2, R_3, R_4 du circuit de telle sorte à obtenir un courant i nul.

Enlevons le galvanomètre, l'ensemble formé par le reste des éléments du circuit forme un dipôle de bornes A et B .



i désigne alors le courant traversant le galvanomètre de A vers B donc ce dipôle en sens inverse, de B vers A . Il existe donc une relation caractéristique entre la tension U_{AB} aux bornes de ce dipôle et l'intensité le traversant de A vers B qui est $-i$. Nous allons déterminer cette relation afin de définir les caractéristiques de ce dipôle.

Considérant ainsi i comme un paramètre et U_{AB} une inconnue, l'approche systématique nous fait considérer trois mailles indépendantes :

$C - A - B - C$, $A - D - B - A$ et $C - B - D - C$

ainsi que trois nœuds indépendants, les nœuds C, A et B

Nous pouvons donc former un système à 6 équations aux 6 inconnues que sont les intensités dans les diverses branches i_1, i_2, i_3, i_4, I et la tension U_{AB} , l'intensité i étant un paramètre

$$\begin{cases} R_1 i_1 + U_{AB} - R_3 i_3 = 0 \\ R_2 i_2 - R_4 i_4 - U_{AB} = 0 \\ R_3 i_3 + R_4 i_4 - e = 0 \\ I = i_1 + i_3 \\ i_1 = i_2 + i \\ i_3 + i = i_4 \end{cases}$$

Prenons des valeurs numériques pour illustrer cela plus concrètement :

$$R_1 = 10 \, \Omega, R_2 = 5 \, \Omega, R_3 = 5 \, \Omega, R_4 = 8 \, \Omega, R = e = 3 \, \text{V}$$

$$\begin{cases} 10 i_1 + U_{AB} - 5 i_3 = 0 \\ 5 i_2 - 8 i_4 - U_{AB} = 0 \\ 5 i_3 + 8 i_4 - 3 = 0 \\ I = i_1 + i_3 \\ i_1 = i_2 + i \\ i_3 + i = i_4 \end{cases}$$

Les deux dernières équations (loi des nœuds) permettent de faire des substitutions dans les trois premières, ce qui conduit à :

$$\begin{cases} 10 (i_2 + i) + U_{AB} - 5 i_3 = 0 \\ 5 i_2 - 8 (i_3 + i) - U_{AB} = 0 \\ 5 i_3 + 8 (i_3 + i) - 3 = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} 10 i_2 - 5 i_3 + U_{AB} = -10 i \\ 5 i_2 - 8 i_3 - U_{AB} = 8 i \\ 13 i_3 = 3 - 8 i \end{cases}$$

puis en remplaçant la deuxième équation par sa somme à la première :

$$\begin{cases} 10 i_2 - 5 i_3 + U_{AB} = -10 i \\ 15 i_2 - 13 i_3 = -2 i \\ 13 i_3 = 3 - 8 i \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} 10 i_2 - 5 i_3 + U_{AB} = -10 i \\ 15 i_2 = 3 - 10 i \\ 13 i_3 = 3 - 8 i \end{cases}$$

Finalement, en remplaçant dans la première équation les valeurs de i_2 et i_3 données par les deux dernières :

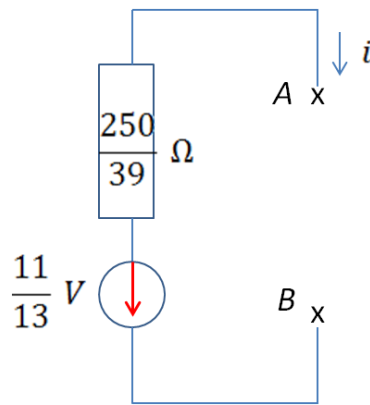
$$10 \times \frac{3 - 10 i}{15} - 5 \times \frac{3 - 8 i}{13} + U_{AB} = -10 i$$

Finalement :

$$U_{AB} = -10 i - \frac{6 - 20 i}{3} + \frac{15 - 40 i}{13}$$

$$U_{AB} = -\frac{11}{13} - \frac{250}{39} i$$

Le dipôle a donc la caractéristique d'un générateur idéal de fém $\frac{11}{13} V$ mis en série avec un résistor de résistance $\frac{250}{39} \Omega$



Ce dipôle équivalent est qualifié de générateur de Thévenin.

Toutefois, la démarche employée pour le déterminer peut s'avérer très lourde si le circuit comporte plus de mailles. Aussi Thévenin a-t-il mis au point une méthode pour faciliter grandement cette résolution. Son principe est simple. Il s'agit de décomposer le système en deux sous-systèmes :

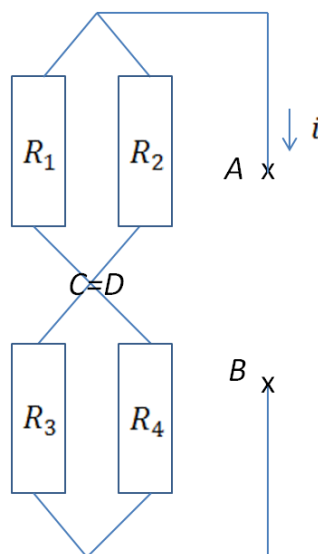
- Un premier sous-système ne conservant en second membre que les termes en i

$$\begin{cases} 10 i_2 - 5 i_3 + U_{AB} = -10 i \\ 5 i_2 - 8 i_3 - U_{AB} = 8 i \\ 13 i_3 = -8 i \end{cases}$$

Ce système correspond alors à la recherche de la caractéristique du dipôle à fém éteinte. Ce dipôle n'est alors plus constitué que de résistors en parallèle et en série et la caractéristique est donc de la forme :

$$U_{AB}^1 = -R_{eq} i$$

où R_{eq} est la résistance équivalente du dipôle qui peut être évaluée simplement en refaisant le schéma du dipôle comme suit, les nœuds C et D pouvant être confondus :



Nous en déduisons :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

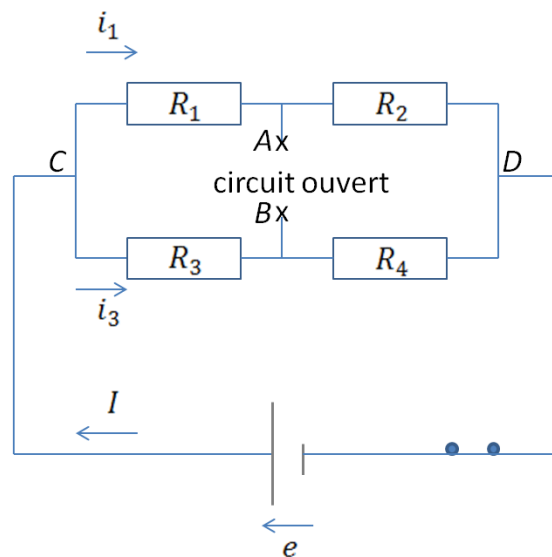
soit :

$$R_{eq} = \frac{10 \times 5}{10 + 5} + \frac{5 \times 8}{5 + 8} = \frac{10}{3} + \frac{40}{13} = \frac{250}{39} \Omega$$

- Un second sous-système ne conservant en second membre que le terme lié à la fém

$$\begin{cases} 10 i_2 - 5 i_3 + U_{AB} = 0 \\ 5 i_2 - 8 i_3 - U_{AB} = 0 \\ 13 i_3 = 3 \end{cases}$$

Ce système correspond alors au circuit initial que l'on a ouvert entre A et B . La solution U_{AB}^2 qui en découle est alors qualifiée de tension à vide. Elle se détermine en résolvant le circuit suivant :



Le fait d'avoir ouvert le circuit entre A et B en simplifie considérablement l'étude. En effet :

$$U_{AB}^2 = U_{AC} + U_{CB} = -\frac{R_1 e}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 e}{R_3 + R_4} = \frac{-R_1 (R_3 + R_4) + R_3 (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2) (R_3 + R_4)} e$$

soit :

$$U_{AB}^2 = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2) (R_3 + R_4)} e$$

soit numériquement :

$$U_{AB}^2 = \frac{5 \times 5 - 10 \times 8}{(10 + 5)(5 + 8)} \times 3 = -\frac{55 \times 3}{15 \times 13} = -\frac{11}{13} V$$

Au final, l'addition des deux solutions donne la caractéristique du dipôle équivalent :

$$U_{AB} = U_{AB}^1 + U_{AB}^2 = -R_{th} i - e_{th}$$

avec :

$$R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

$$e_{th} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} e$$

Nous sommes alors en mesure de répondre à la question initiale. Pour que ce dipôle ne débite aucun courant dans le galvanomètre, il faut et il suffit que e_{th} soit nul donc que la condition suivante soit vérifiée :

$$R_2 R_3 = R_1 R_4$$

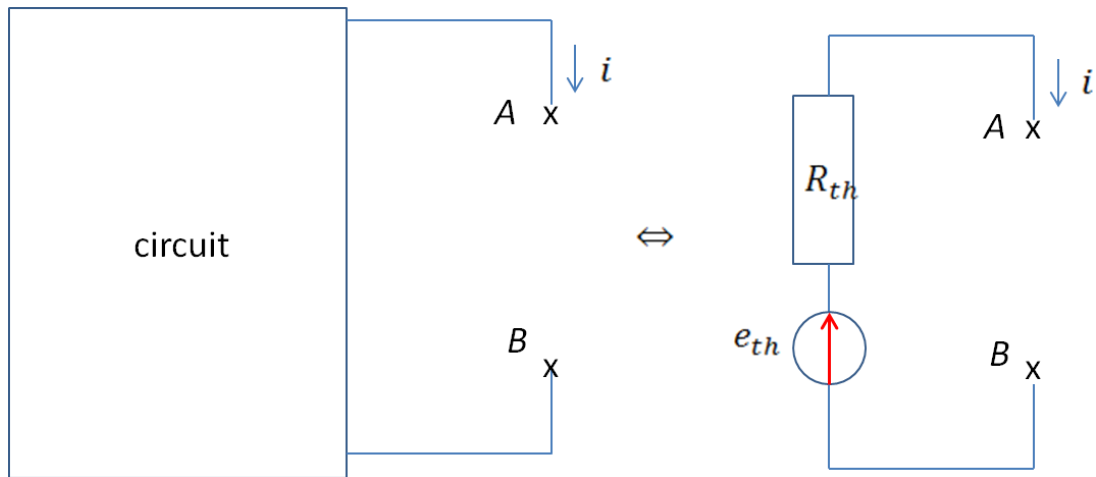
Cette relation peut être exploitée pour la mesure d'une résistance inconnue. Supposons en effet R_1 et R_2 données, R_3 pouvant être ajustée (rhéostat) et R_4 une résistance inconnue à mesurer. On ajuste alors R_3 de telle sorte à ce que le galvanomètre indique un courant i nul. La mesure de R_4 s'en déduit :

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

II Théorème de Thévenin

Le théorème de Thévenin s'énonce de façon générale ainsi :

Etant donné un circuit formé de résistors et de générateurs de tension et formant un dipôle unique présentant deux bornes A et B alors la caractéristique de ce dipôle est celle d'un générateur idéal de tension e_{th} mis en série avec une résistance R_{th}



e_{th} se détermine en calculant la tension à vide U_{AB} de ce dipôle en circuit ouvert ($i = 0$)

R_{th} est la résistance équivalente de ce dipôle lorsque toutes les fém y ont été mises à zéro.

Application :

Si le dipôle est bouclé sur un résistor de résistance R , l'intensité traversant ce dernier s'en déduit aisément par la loi de Pouillet :

$$i = \frac{e_{th}}{R_{th} + R}$$

