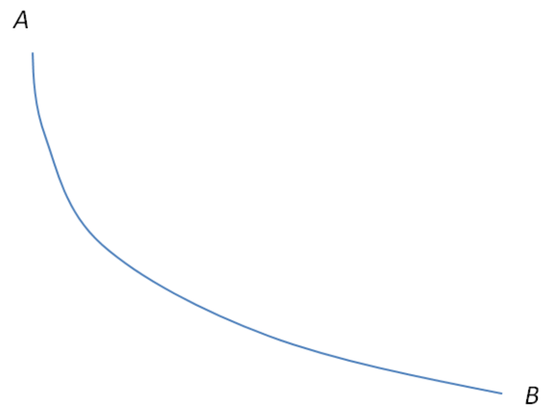
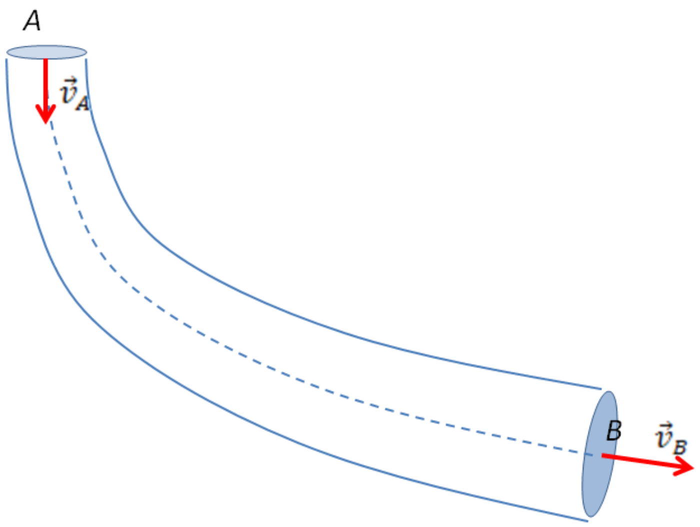
Mécanique des fluides

Théorème de Bernoulli

Considérons un fluide incompressible comme de l'eau s'écoulant de façon stationnaire dans un régime non tourbillonnaire de telle sorte qu'une particule d'eau suive une ligne de courant l'amenant d'un point A à un point B.

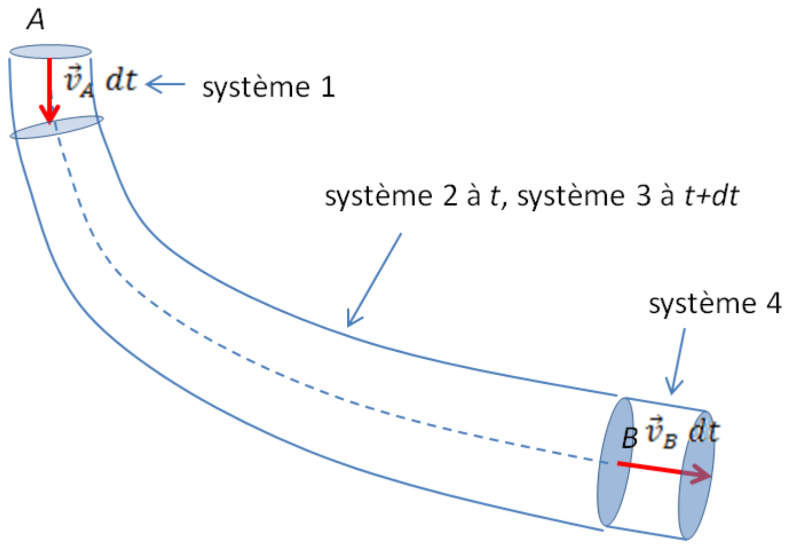


Considérons une section infinitésimale dS_A perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}_A$ de la particule d'eau au point A. Les points de cette section définissent une section dS_B en B perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}_B$ de la particule d'eau au point B.



Les particules d'eau se trouvant à un instant t dans la section dS_A se retrouvent à un instant ultérieur dans la section dS_B. Leurs trajectoires forment un tube de courant.

Considérons donc le système formé à l'instant t par ce tube de courant. Ce système se retrouve dans un nouveau tube de courant à l'instant $t + dt$.



Le fluide étant incompressible, écrivons la conservation du débit dans le tube de courant :

$$dq = dS_A v_A\, dt = dS_B v_A\, dt$$

Faisons alors le bilan des transferts d'énergie de ce système entre les instants t et $t + dt$ en décomposant ce système en sous-systèmes 2 et 3 à l'instant t et en sous-systèmes 3 et 4 à l'instant $t + dt$ et en notant :

- $\rho =$ masse volumique du fluide (constante)
- $U_1(t) =$ énergie interne du sous-système 1 à l'instant t
- $E_2(t) =$ énergie totale (interne + mécanique macroscopique) du sous-système 2 à l'instant t
-
- $E_3(t + dt) =$ énergie totale (interne + mécanique macroscopique) du sous-système 3 à l'instant $t + dt$
- $U_4(t + dt) =$ énergie interne du sous-système 4 à l'instant $t + dt$
- $m_1 = \rho\, dq\, dt =$ masse du sous-système 1
- $m =$ masse du sous-système 2 et du sous-système 3
- $m_4 = \rho\, dq\, dt =$ masse du sous-système 4
- $z_G(t) =$ coordonnée verticale (altitude) du centre de gravité du système à l'instant t
- $z_G(t + dt) =$ coordonnée verticale (altitude) du centre de gravité du système à l'instant $t + dt$
- $z_{G1} =$ coordonnée du centre de gravité du sous-système 1
- $z_{G2} =$ coordonnée du centre de gravité du sous-système 2 ou du sous-système 3
- $z_{G4} =$ coordonnée du centre de gravité du sous-système 4

-

<u>Energie totale du système à l'instant t (sous-systèmes 1 et 2):</u>

$$\boxed{E(t) = U_1(t) + \frac{1}{2}\, \rho\, dq\, dt\, {v_A}^2 + +m_1\, g\, z_{G1} + E_2(t)}$$

<u>Energie totale du système à l'instant $t + dt$ (sous-systèmes 3 et 4):</u>

$$\boxed{E(t+dt) = U_4(t+dt) + \frac{1}{2}\, \rho\, dq\, dt\, {v_B}^2 + +m_4\, g\, z_{G4} + E_3(t+dt)}$$

Ecrivons que la variation d'énergie totale du système est égale au travail et à la chaleur échangée par ce dernier avec le milieu extérieur entre les instants t et $t + dt$ en notant :

- $Q =$ chaleur échangée avec l'environnement extérieur
- $W_A =$ travail des forces de pression sur la section amont dS_A
- $W_B =$ travail des forces de pression sur la section aval dS_B
- $W =$ autres travaux (échangé avec une turbine par exemple ou travail de forces de frottements liées à la viscosité du fluide)

$$E(t+dt) - E(t) = W_A + W_B + W + Q$$

Or :

$$W_A = P_A\, dS_A\, v_A\, dt = P_A\, dq\, dt$$

$$W_B = -P_B\, dS_B\, v_B\, dt = -P_B\, dq\, dt$$

Si nous nous plaçons dans le cas où il n'y a pas de travail échangé autre que les forces de pression internes au fluide (donc pas de travail de forces de frottement liée à la viscosité) et pas de chaleur échangée, alors, nous avons simplement :

$$\boxed{E(t+dt) - E(t) = (P_A - P_B)\, dq\, dt}$$

L'absence de chaleur échangée implique que la température du fluide ne varie pas le long d'une ligne de courant et de ce fait : $U_4(t+dt) = U_1(t)$

Le régime stationnaire implique : $E_3(t+dt) = E_2(t)$

Nous en déduisons :

$$E(t+dt) - E(t) = \frac{1}{2}\,\rho\, dq\, dt\, {v_B}^2 - \frac{1}{2}\,\rho\, dq\, dt\, {v_A}^2 + m_4\, g\, z_{G4} - m_1\, g\, z_{G1}$$

Comme dt est infiniment petit, nous avons :

$$z_{G4} = z_B \;, \qquad z_{G1} = z_A$$

De plus :

$$m_4 = m_1 = \rho\, dq\, dt$$

Nous en déduisons :

$$\frac{1}{2}\,\rho\, dq\, dt\, {v_B}^2 - \frac{1}{2}\,\rho\, dq\, dt\, {v_A}^2 + \rho\, g\, dq\, dt\, z_B - \rho\, g\, dq\, dt\, z_A = P_A\, dq\, dt - P_B\, dq\, dt$$

Soit, en divisant par $dq\ dt$ et en mettant tout ce qui est relatif au point B dans le membre de gauche et au point A dans le membre de droite :

$$\boxed{\boldsymbol{P_B + \frac{1}{2}\,\rho\, {v_B}^2 + \rho\, g\, z_B = P_A + \frac{1}{2}\,\rho\, {v_A}^2 + \rho\, g\, z_A}}$$

Ce qui constitue le théorème de Bernoulli pour les fluides incompressibles en régime permanent en l'absence d'échange de chaleur et de travaux échangés autres que les forces de pression internes.

<u>Remarque</u> :

La mémorisation de cette formule peut être facilitée en notant ceci. Si on désigne par $V_A = V_B = 1$ un volume unité de fluide, la masse m_0 de ce volume est alors la masse volumique ρ et l'équation s'écrit, en désignant par U_A l'énergie interne de ce volume en amont et U_B son énergie interne en aval :

$$U_B + P_B\, V_B + \frac{1}{2}\, m_0\, {v_B}^2 + m_0\, g\, z_B = U_A + P_A\, V_A + \frac{1}{2}\, m_0\, {v_A}^2 + m_0\, g\, z_A$$

Or la quantité $H = U + P\,V$ est rappelons le, l'enthalpie thermodynamique, dont nous avons vu que la variation représentait les échanges d'énergie sous forme de travail ou de chaleur avec l'extérieur déduction faite d'un travail non utilisable échangé directement ou indirectement avec le ou les fluides extérieurs à ce système.

Il nous parait alors naturel d'introduire pour un système quelconque un concept d'enthalpie totale, tenant compte des énergies macroscopiques, énergie cinétique et énergie potentielle de pesanteur :

$$\boxed{H_{totale} = U + P\,V + \frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,z}$$

Le théorème de Bernoulli traduit alors la conservation de l'enthalpie totale d'un volume unité de fluide.

Il est alors aisé d'en déduire la version généralisée pour un tube de courant, tenant compte des forces de viscosité, de la chaleur échangée avec l'environnement (cas des évaporateurs et des condenseurs notamment) :

$$\Delta\left(U + P + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\rho}\,v^2 + \boldsymbol{\rho}\,g\,z\right) = \frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W}{dt}$$