Théorème de Gauss en électrostatique du vide

- *Modélisation continue*

I Quelques propriétés de mathématiques relatives aux intégrales triples

Si une fonction de trois variables *f(x ; y ; z)* est différentiable sur un domaine compact V (fermé borné) de $\mathbb{R}^3$ entouré par une surface S et si $(n_x(x,y,z)$; $n_y(x,y,z)$; $n_y(x,y,z)$) désignent les coordonnées de la normale sortante à cette surface, alors nous avons :

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \oiint_S f(x,y,z)\ n_x(x,y,z) dS$$

De même :

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \oiint_S f(x,y,z)\ n_y(x,y,z) dS$$

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \oiint_S f(x,y,z)\ n_z(x,y,z) dS$$

On en déduit la très importante formule de Green-Ostrogradski, si utilisée ne serait ce qu'en électromagnétisme :

Pour une fonction vectorielle $\vec{f}$ à trois composantes f_x, f_y, f_z différentiables sur un domaine compact de $\mathbb{R}^3$, nous avons :

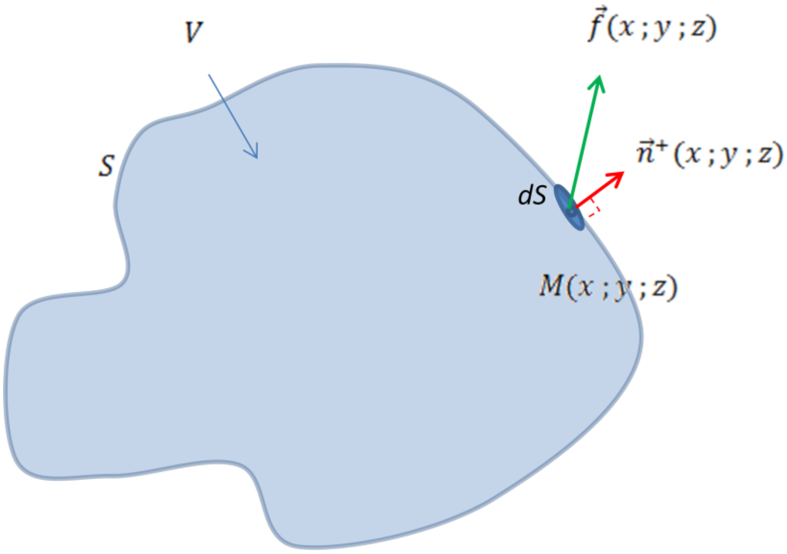
$$\iiint_V \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \oiint_S \left(f_x\, n_x + f_y\, n_y + f_z\, n_z\right) dS$$

Ce qui s'écrit :

$$\boxed{\iiint_V div(\vec{f})\, dV = \oiint_{S^+} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dS}}$$

Cette dernière quantité est appelée **flux sortant de $\vec{f}$ à travers la surface S**

Nous avons noté S^+ la surface frontière du volume pour rappeler que $\overrightarrow{dS} = dS\, \vec{n}$ correspond à une normale sortante.



II Divergence du champ électrique pour une distribution de charges ponctuelles

1) Cas d'une charge ponctuelle

Considérons une charge ponctuelle *q* placée en un point *O* que nous considérerons comme étant l'origine d'un repère orthonormé *(O ; x ; y ; z)*

Cette charge produit en tout point distinct de O un vecteur champ électrique dont les coordonnées sont, dans la base du repère :

$$\begin{cases} E_x = k\,q\,\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = k\,q\,x\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ E_y = k\,q\,\dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = k\,q\,y\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ E_z = k\,q\,\dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = k\,q\,z\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Calculons alors les dérivées partielles intervenant dans la divergence

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = k\,q\,\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3\,k\,q\,x^2\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial y} = k\,q\,\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3\,k\,q\,y^2\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = k\,q\,\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3\,k\,q\,z^2\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \end{cases}$$

La divergence s'en déduit en posant :

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$Div(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$= \;3\,k\,q\;r^{-3} - 3\,k\,q\,(x^2+y^2+z^2)\,r^{-5}$$

$$= \ 3\,k\,q\ r^{-3} - 3\,k\,q\,r^{2}\,r^{-5}$$

$$= \ 3\,k\,q\ r^{-3} - 3\,k\,q\,r^{-3}$$

Donc :

$$\boldsymbol{Div}(\vec{\boldsymbol{E}}) = \mathbf{0}$$

La divergence du champ électrique est donc nulle en tout point de l'espace distinct du point où se trouve la charge.

2) Cas d'un système de *N* charges ponctuelles $(q_i)_{i=1 \text{ à } N}$

Chacune de ces charges crée en tout point $M(x\,;y;z)$ de l'espace distinct d'un point où se trouve une charge, un champ électrique $\vec{E}_i(x\,;y\,;z)$ et le champ résultant est :

$$\vec{E}(x\,;y\,;z) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(x\,;y\,;z)$$

Or l'opérateur divergence étant un opérateur linéaire, nous avons :

$$Div(\vec{E}) = \sum_{i=1}^{N} Div(\vec{E}_i)$$

Il en résulte :

$$\boldsymbol{Div}(\vec{\boldsymbol{E}}) = \vec{\mathbf{0}}$$

La divergence du champ électrique associé à une distribution de charges ponctuelles est donc nulle en tout point de l'espace distinct d'un point où se trouve une charge.

III Théorème de Gauss pour une distribution de charges ponctuelles

C'est la conséquence immédiate de la formule de Green-Ostrogradski.

1) Surface fermée entourant un volume exempt de charges

Soit un volume quelconque exempt de charges, des charges ponctuelles ou non pouvant être distribuées à l'extérieur de ce volume, alors d'après la formule de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_V div(\vec{E})\, dV = \oiint_{S^+} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Mais en tout point de ce volume on a également :

$$div(\vec{E}) = 0$$

On en déduit :

$$\boxed{\oiint_{S^+} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{dS}} = \mathbf{0}}$$

Autrement dit, le flux sortant du champ électrique à travers toute surface fermée de l'espace entourant un volume exempt de charges est nul.

2) Surface fermée entourant un volume contenant des charges

Supposons que le volume contienne *N* charges ponctuelles $(q_i)_{i=1 \text{ à } N}$ et qu'il n'y en ait pas sur la surface l'entourant.

Alors :

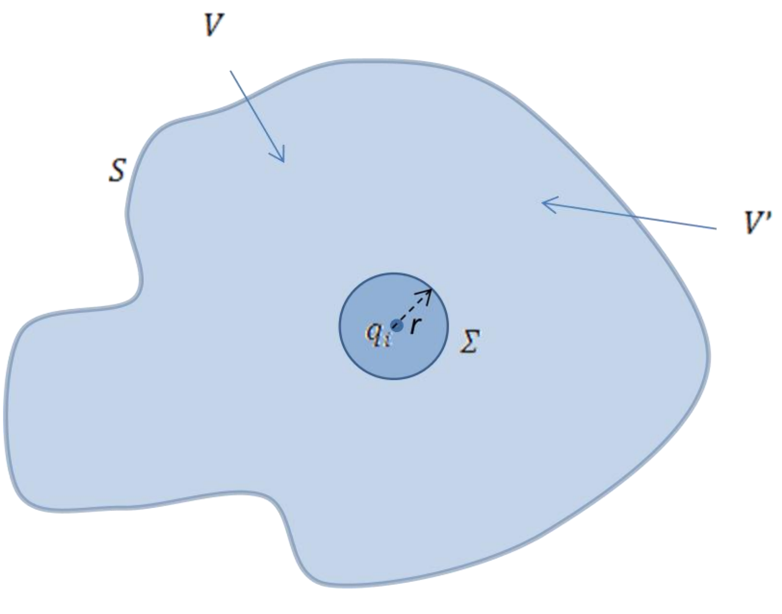
$$\oiint_{S^+} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \oiint_{S^+} \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \oiint_{S^+} \vec{E}_i \cdot \overrightarrow{dS}$$

Autrement dit :

Le flux sortant du champ électrique résultant est la somme des flux des champs produits par chaque charge.

Examinons alors le flux créé par une charge q_i. Considérons pour cela une petite sphère de rayon r entourant cette charge et entièrement contenue dans le volume.



La formule de Green-Ostrograski s'applique sur le volume *V'* délimité par la surface initiale *S* et la surface Σ de cette sphère. Elle conduit à :

$$\oiint_{S^+} \vec{E}_i \cdot \overrightarrow{dS} + \oiint_{\Sigma^-} \vec{E}_i \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_{V'} div\left(\vec{E}_i\right) dV = 0$$

On en déduit :

$$\oiint_{\mathrm{S}^+} \vec{E}_i \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} = -\oiint_{\Sigma^-} \vec{E}_i \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} = \oiint_{\Sigma^+} \vec{E}_i \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}}$$

Donc le flux sortant est le même sur *S* et sur Σ. Or il s'évalue facilement sur Σ.

$$\oiint_{\Sigma^+} \vec{E}_i \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{q_i}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,\mathrm{r}^2} \times 4\,\pi\,r^2 = \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

Il en découle le théorème de Gauss

Le flux sortant du champ électrique à travers une surface *S* entourant un volume *V* occupé par *N* charges q_i dans son espace intérieur est :

$$\boxed{\oiint_{\mathbf{S}^+} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}} = \frac{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \boldsymbol{q_i}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} = \frac{\mathbf{Q_{int}}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}}$$

Passage au continu :

Si la modélisation conduit à considérer des distributions continues, surfaciques ou volumiques, alors, cette propriété sera conservée, mais le champ électrique pourra dans le cas d'une modélisation par densité volumique de charge continue $\rho(x; y; z)$, être défini en tous points de l'espace, même aux lieux de la distribution continue.

Dans ce cas, nous aurons pour toute surface *S* entourant un volume *V*, la formule d'Ostrogradski :

$$\oiint_{S^+} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_V div(\vec{E})\, dV$$

En appliquant alors cette formule à une sphère de centre un point M quelconque de l'espace et de rayon r infinitésimal, nous aurons d'une part par le théorème de Gauss :

$$\oiint_{S^+} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} \approx \frac{\rho\, dV}{\varepsilon_0}$$

D'autre part, parce que la sphère est infinitésimale et $div(\vec{E})$ supposée continue :

$$\iiint_V div(\vec{E})\, dV \approx div(\vec{E})\, dV$$

La comparaison des deux expressions conduit à :

$$\boxed{\boldsymbol{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}}$$

C’est le point de départ d’un jeu d’équation qui liera champ électrique, défini plus généralement, et champ magnétique, dans un système appelé **équations de Maxwell**, lesquelles seront le prélude de la découverte de la nature électromagnétique du rayonnement.

L’équation précédente conduit à une autre équation sur le potentiel électrostatique *V*, qui est :

$$-\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

On appelle alors **Laplacien** de *V* la quantité :

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}$$

L’équation vérifiée par le potentiel électrostatique s’écrit alors :

$$\boxed{\Delta V+\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0}$$

Cette équation est connue sous le nom **d’équation de Poisson**.

Une propriété mathématique remarquable de ce genre d’équation est que le potentiel est totalement déterminé dans un volume donné entouré par une surface *S*, à partir de la connaissance du potentiel sur cette surface (dite conditions aux limites). C’est ce que nous allons voir dans les conséquences du théorème de Gauss.

IV Continuité du potentiel pour des distributions volumiques et surfaciques

Nous avons vu que le potentiel électrostatique ne pouvait pas être défini là où il y a des charges ponctuelles. En revanche, nous allons voir qu'il peut l'être là où il y a une densité volumique de charges ou une densité surfacique.

1) Densité surfacique

Considérons un point A d'une surface en lequel il y a une densité surfacique de charges σ et isolons un disque de rayon r suffisamment petit pour que ce dernier puisse être considéré comme faisant partie intégralement de la surface.

Le potentiel électrostatique au voisinage de A est alors la somme du potentiel créé par ce disque et du potentiel créé par le reste de l'espace. Pour ce dernier, le point A étant exempt de charges, il y a continuité du potentiel en A. Reste donc à considérer le potentiel créé par le disque.

Or, nous avons en exercice, calculé le potentiel créé par un disque de rayon r portant une charge Q uniforme à une distance a de son axe et obtenu :

$$V(a) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2} + |a|}$$

En faisant tendre a vers 0, ce potentiel converge vers la valeur :

$$V = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{r} = \frac{\sigma\,\pi\,r^2}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{r} = \frac{\sigma\,r}{2\;\varepsilon_0}$$

Autrement dit :

Le potentiel peut être défini par prolongement continu aux points d'une surface sur laquelle il y a une densité surfacique de charges.

Voyons ce qu'il en est pour une distribution volumique. Il s'agit cette fois-ci d'isoler une boule de rayon R suffisamment petit autour d'un point A où il y a une densité volumique de charges ρ.

Intéressons nous alors au potentiel créé en A par une boule de rayon R uniformément chargée avec la densité volumique ρ.

En prenant comme éléments différentiels des volumes situés entre des sphères de rayon r et $r + dr$ portant la charge $d^1q = \rho \times 4\,\pi\,r^2\,dr$, nous avons :

$$V(A) = \int_{r=0}^{r=R} \frac{d^1q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} = \int_{r=0}^{r=R} \frac{\rho \times 4\,\pi\,r^2\,dr}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} = \rho\,\frac{R^2}{2\,\varepsilon_0}$$

Autrement dit :

Le potentiel peut être défini par prolongement continu aux points d'un volume dans lequel il y a une densité volumique de charges.

Quant au champ électrique, il subit une discontinuité à la traversée de la surface équipotentielle chargée d'un conducteur en équilibre électrostatique, comme nous le verrons au fichier consacré à ce sujet.

En revanche, dans un volume où il n'y a que des distributions volumiques continues, le champ électrique reste défini aux points de ce volume, ce qui précisément conduit à un formalisme généralisé continu regroupé dans les équations de Maxwell.

V Théorème des extremums locaux-Volume équipotentiel

Considérons un volume de l'espace exempt de charges, mais pas nécessairement vide. Le champ électrostatique et le potentiel y sont continus.

Imaginons que le potentiel électrostatique présente un maximum local strict en un point *A* intérieur à ce volume c'est-à-dire qu'il existe une boule $\mathcal{B}$ de centre *A* et de rayon R telle que l'on ait pour tout point M de *B* : $V(M) \leq V(A)$ et pour tout $r < R$ il existe un point *B* dans la boule de centre *A* et de rayon r tel que $V(B) < V(A)$.

En prenant r suffisamment petit et par continuité du champ électrique $\vec{E}$, nous pouvons faire, pour tout point M de la sphère de centre *A* et de rayon r,les approximations :

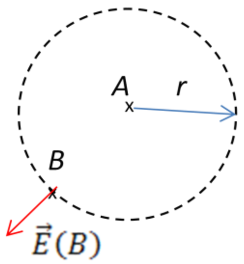
$$V(A) - V(M) = \int_{A \to B} \vec{E} \cdot d\vec{s} \approx \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{AM}$$

On en déduit, pour tout point M de cette sphère :

$$\vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{AM} \geq 0$$

et qu'il existe un point B de cette sphère en lequel :

$$\vec{E}(B) \cdot \overrightarrow{AB} > 0$$



Par continuité de $\vec{E}$, nous en déduisons qu'il existe une calotte de cette sphère, centrée sur B et sur laquelle : $\vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{AM} > 0$.

Le flux sortant du champ électrique à travers la sphère a donc une valeur strictement positive, ce qui contredit le théorème de Gauss, puisque la sphère ne contient aucune charge.

Le même raisonnement peut être fait en remplaçant maximum local strict par minimum local strict.

Nous formulons donc la propriété

Dans un volume de l'espace exempt de charges, le potentiel électrostatique ne peut pas présenter d'extremum local strict (maximum ou minimum).

Une conséquence immédiate de ce théorème est la suivante :

Dans un volume borné de l'espace, exempt de charges, entouré par une surface dont tous les points sont à la même valeur de potentiel électrostatique (surface dite équipotentielle), le potentiel électrostatique prend cette valeur constante en tous points du volume. Le volume, avec sa surface frontière est donc équipotentiel.

En effet, dans l'intérieur du volume exempt de charges, le potentiel électrostatique ne peut avoir d'extremums stricts, il est donc constant.

Ce point va être essentiel dans la description des états électriques des conducteurs en équilibre électrostatique

VI Théorème d'unicité

Dans un volume borné de l'espace, exempt ou non de charges volumiques ou surfaciques, entouré par une surface sur laquelle le potentiel électrostatique est une fonction donnée, la fonction potentiel électrostatique est définie de manière unique dans le volume.

Ceci est une conséquence de la propriété précédente. Notons S la surface entourant le volume et supposons que $V_1(M)$ et $V_2(M)$ soient deux solutions de l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Et vérifiant sur la surface S : $V_1(M) = V_2(M)$

Alors, la fonction différence : $V(M) = V_1(M) - V_2(M)$ vérifie l'équation :

$$\Delta V = 0$$

Avec pour condition sur la surface *S* (dite condition limite) : $V(M) = 0$

D'après l'étude précédente $V(M)$ est nulle dans le volume et donc $V_1(M) = V_2(M)$

VII Linéarité de l'opérateur Laplacien - Théorème de superposition

Dans un volume borné de l'espace, entouré par une surface, si $\boldsymbol{V_1(M)}$ et $\boldsymbol{V_2(M)}$ sont deux solutions de l'équation de Poisson pour des distributions volumiques et surfaciques de charges respectives $\boldsymbol{(\rho_1(M); \sigma_1(M))}$ et $\boldsymbol{(\rho_2(M); \sigma_2(M))}$, avec pour condition limite sur la surface : $\boldsymbol{V_1(M) = f_1(M)}$; $\boldsymbol{V_2(M) = f_2(M)}$, $\boldsymbol{f_1(M)}$ et $\boldsymbol{f_2(M)}$ étant deux fonctions données sur cette surface, alors pour tous réels *a* et *b*, la fonction $\boldsymbol{V(M) = a\, V_1(M) + b\, V_2(M)}$ est solution de l'équation de Poisson associé à la condition aux limites $\boldsymbol{V(M) = a\, f_1(M) + b\, f_2(M)}$ et pour la distribution :

$$\boldsymbol{\left(a\, \rho_1(M) + b\, \rho_2(M); a\, \sigma_1(M) + b\, \sigma_2(M)\right)}$$

C'est une conséquence immédiate du caractère linéaire de l'opérateur Laplacien. En effet si on a :

$$\Delta V_1 + \frac{\rho_1}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\Delta V_2 + \frac{\rho_2}{\varepsilon_0} = 0$$

Alors, par combinaison des deux équations, on déduit :

$$\Delta(a\, V_1(M) + b\, V_2(M) + \frac{a\, \rho_1(M) + b\, \rho_2(M)}{\varepsilon_0} = 0$$

Si on prend $a = b = 1$, cela s'appelle **théorème de superposition**.