Système de Vandermonde

Enoncé de l'exercice

Soit un système S_n de la forme que nous qualifierons de Vandermonde d'ordre *n* aux variables $(x_1\ ;\ x_2\ ;\ \cdots;\ x_n)$

$$\begin{cases} 1\,x_1 + 1\,x_2 + \cdots + 1\,x_n = a_0 \\ \lambda_1\,x_1 + \lambda_2\,x_2 + \cdots + \lambda_n\,x_n = a_1 \\ {\lambda_1}^2\,x_1 + {\lambda_2}^2\,x_2 + \cdots + {\lambda_n}^2\,x_n = a_2 \\ \vdots \\ {\lambda_1}^{n-2}\,x_1 + {\lambda_2}^{n-2}\,x_2 + \cdots + {\lambda_n}^{n-2}\,x_n = a_{n-2} \\ {\lambda_1}^{n-1}\,x_1 + {\lambda_2}^{n-1}\,x_2 + \cdots + {\lambda_n}^{n-1}\,x_n = a_{n-1} \end{cases}$$

Nous allons montrer que ce système admet une solution unique, donc est inversible si et seulement si les coefficients λ_i y figurant sont deux à deux distincts.

Démarche

Tout d'abord, si deux coefficients sont égaux, par exemple, sans nuire à la généralité, $\lambda_1 = \lambda_2$. Alors, si $(x_1\ ;\ x_2\ ;\ \cdots;\ x_n)$ est une solution du système, pour tout élément a du corps K sur lequel on considère la matrice, $(x_1 + a\ ;\ x_2 - a\ ;\ \cdots;\ x_n)$ est une solution.

Il y a donc soit aucune solution, soit plus d'une et donc pas une unique solution.

Montrons alors que réciproquement, si les coefficients sont deux à deux distincts, il y a une unique solution.

1) Cas d'un système de rang 2

Commençons par initialiser la propriété pour un système de rang 2.

Le système a alors la forme suivante :

$$\begin{cases} 1\,x_1 \quad + \quad 1\,x_2 = a_0 \\ \lambda_1\,x_1 \quad + \lambda_2\,x_2 = a_1 \end{cases}$$

Nous supposons donc $\lambda_1 \neq \lambda_2$

La résolution se fait par la méthode de Gauss en multipliant la première équation par $-\lambda_1$ et en l'ajoutant à la seconde. Cela conduit à :

$$\begin{cases} 1\,x_1 \quad + \quad 1\,x_2 = \qquad a_0 \\ \quad (\lambda_2 - \lambda_1)\,x_2 = a_1 - \lambda_1\,a_0 \end{cases}$$

Les éléments diagonaux de ce système n'étant pas nuls, il admet une solution unique, que l'on obtiendrait en poursuivant la remontée de la méthode de Gauss.

2) <u>Cas d'un système de rang $n \geq 3$</u>

Inspirons nous de ce qui a été fait précédemment, mais en remontant par le bas.

En multipliant l'avant dernière colonne par $-\lambda_1$ et en l'ajoutant à la dernière, puis en réitérant ce procédé en remontant, on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{1\,x_1} \quad + \quad \mathbf{1\,x_2} \quad + \quad \cdots \quad + \quad \mathbf{1\,x_n} = \boldsymbol{a_0} \\ \quad (\boldsymbol{\lambda_2} - \boldsymbol{\lambda_1})\,\boldsymbol{x_2} \quad + \quad \cdots + \ (\boldsymbol{\lambda_n} - \boldsymbol{\lambda_1})\,\boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{b_1} \\ \quad \boldsymbol{\lambda_2}(\boldsymbol{\lambda_2} - \boldsymbol{\lambda_1})\,\boldsymbol{x_2} \quad + \quad \cdots \quad + \quad \boldsymbol{\lambda_n}(\boldsymbol{\lambda_n} - \boldsymbol{\lambda_1})\,\boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{b_2} \\ \qquad \vdots \\ \quad \boldsymbol{\lambda_2}^{\boldsymbol{n-1}}(\boldsymbol{\lambda_2} - \boldsymbol{\lambda_1})\,\boldsymbol{x_2} + \quad \cdots \quad + \quad \boldsymbol{\lambda_n}^{\boldsymbol{n-1}}(\boldsymbol{\lambda_n} - \boldsymbol{\lambda_1})\,\boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{b_{n-2}} \\ \quad \boldsymbol{\lambda_2}^{\boldsymbol{n-2}}(\boldsymbol{\lambda_2} - \boldsymbol{\lambda_1})\,\boldsymbol{x_2} \quad + \cdots \quad + \quad \boldsymbol{\lambda_n}^{\boldsymbol{n-2}}(\boldsymbol{\lambda_n} - \boldsymbol{\lambda_1})\,\boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{b_{n-1}} \end{cases}$$

En posant $y_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)\,x_2\,; \cdots ; y_n = (\lambda_n - \lambda_1)\,x_2$ ce système fait apparaître un système d'ordre $n-1$ aux variables $(y_2\,; \cdots ; y_n)$ liées de manière unique aux variables $(x_2\,; \cdots ; x_n)$

En admettant une hypothèse de récurrence selon laquelle un système de Vandermonde de rang $n-1$ pour $n \geq 3$ ayant des coefficients distincts deux à deux admet une unique solution, nous en déduisons que notre système précédent a une solution unique en

$(x_1\ ;\ x_2\ ;\cdots;x_n)$, ce qui fait qu'un système de Vandermonde de rang n immédiatement supérieur et ayant des coefficients distincts deux à deux a une solution unique.

Cela prouve par récurrence ce que nous souhaitions montrer