Systèmes différentiels linéaires

I Définition :

Un système différentiel linéaire est un système d'équations différentielles de la forme :

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}(x)\, y_1 + a_{12}(x)\, y_2 + \cdots + a_{1n}(x)\, y_n + b_1(x) \\ y'_2 = a_{21}(x)\, y_1 + a_{22}(x)\, y_2 + \cdots + a_{2n}(x)\, y_n + b_2(x) \\ \vdots \\ y'_n = a_{n1}(x)\, y_1 + a_{n2}(x)\, y_2 + \cdots + a_{nn}(x)\, y_n + b_n(x) \end{cases}$$

où les $a_{ij}(x)$ et les $b_i(x)$ sont des fonctions réelles ou complexes à variable réelle, continues sur un même intervalle I et les y_i les fonctions à déterminer.

Afin d'en simplifier l'étude, on introduit des notations matricielles en posant :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit alors sous une forme analogue à celle d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\boxed{Y' = A(x)\, Y + B(x) \qquad\qquad (E)}$$

Et on lui associe, comme dans ce dernier cas, une équation homogène :

$$\boxed{Y' = A(x)\, Y \qquad\qquad (H)}$$

Un exemple :

$$\begin{cases} y'_1 = Ln(x)\, y_1 + y_2 + x \\ y'_2 = Ln(1-x)\;\; y_1 + \sqrt{x}\;\; y_2 - 1 \end{cases}$$

L'intervalle I est $]0,1[$ et :

$$A(x) = \begin{pmatrix} Ln(x) & 1 \\ Ln(1-x) & \sqrt{x} \end{pmatrix} \quad B(x) = \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

II Equation différentielle linéaire d'ordre n normalisée

Une équation différentielle linéaire d'ordre n normalisée est une équation de la forme :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y + b(x)$$

Où les $a_i(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions réelles ou complexes à variable réelle, continues sur un même intervalle I et y la fonction à déterminer.

Un tel problème peut alors se mettre sous forme de système différentiel en introduisant :

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ a_0(x) & a_1(x) & & \dots & a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}$$

III Résolution d'un système différentiel linéaire :

L'ensemble des solutions du système différentiel linéaire homogène associé (H) est un espace vectoriel (sur le corps considéré $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)) de dimension n, ceci en appliquant un résultat connu sous le nom de théorème de Cauchy-Lipschitz et si $\Phi_p(x)$ désigne une solution particulière du système complet (E) et $\left(\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)\right)$ une base de solutions de (H) alors l'ensemble des solutions de (E) est l'espace affine de dimension n :

$$\Phi_p(x) + Vect[\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)]$$

$$= \left\{\Phi_p(x) + \alpha_1\, \Phi_1(x) + \alpha_2\, \Phi_2(x) + \cdots + \alpha_n\, \Phi_n(x) : (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \in K^n \right\}$$

IV Détermination d'une base de solutions - Wronskien

Il n'existe pas de méthode générale permettant d'aboutir à la détermination explicite d'une base de solutions du système homogène associé, sauf dans des cas particuliers comme celui où les coefficients de la matrice $A(x)$ sont constants.

Toutefois, une propriété de ces systèmes peut donner une méthode permettant de déterminer de telles bases, dès l'instant qu'on a pu déterminer un système libre de $n-1$ solutions de (H). C'est la propriété du Wronskien.

Définition du Wronskien :

Etant donnée une famille $\left(\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)\right)$ de n solutions de (H) ,on définit la matrice wronskienne $W(x)$ comme étant la matrice formée avec les éléments de cette famille et on appelle Wronskien de cette famille, son déterminant que nous noterons $|W(x)|$

Propriété du Wronskien :

Le Wronskien d'une famille $\left(\boldsymbol{\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)}\right)$ de $\boldsymbol{n}$ solutions de $\boldsymbol{(H)}$ est soit identiquement nul sur l'intervalle $\boldsymbol{I}$, soit il ne s'annule pas.

Plus précisément, il est solution de l'équation différentielle :

$$\boldsymbol{y' = Tr\big(A(x)\big)y}$$

Autrement dit :

$$\boldsymbol{|W(x)| = |W(x_0)|\, e^{\int_{x_0}^{x} Tr(A(t))\, dt}}$$

Preuve :

$|W(x)|$ est formée d'une somme de produits de fonctions dérivables sur I donc il est dérivable sur I et :

$$|W(x)|'$$
$$= |\Phi'_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)| + |\Phi_1(x), \Phi'_2(x), \dots, \Phi_n(x)| + \cdots + |\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi'_n(x)|$$
$$= |A(x)\, \Phi_1(x)\, , \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)| + |\Phi_1(x), A(x)\, \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)| + \cdots$$
$$+ |\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, A(x)\, \Phi_n(x)|$$

Considérons alors, pour une matrice carrée d'ordre n et n vecteurs colonnes d'ordre n la forme :

$$f(X_1,\ X_2, \dots, X_n) = |A\, X_1,\ X_2, \dots, X_n| + |X_1, A\, X_2, \dots, X_n| + \cdots + |X_1,\ X_2, \dots, A\, X_n|$$

Cette forme est n −linéaire alternée, donc elle est proportionnelle au déterminant, soit :

$$f(X_1,\ X_2, \dots, X_n) = \lambda\, |\, X_1,\ X_2, \dots, X_n|$$

On peut déterminer λ en prenant pour famille $(X_1,\ X_2, \dots, X_n)$ la base canonique $(E_1,\ E_2, \dots, E_n)$ de l'espace des vecteurs colonnes, où E_i est une colonne formée de 0 sauf à la $ième$ position où le terme vaut 1. Ainsi :

$$\lambda = f(E_1,\ E_2, \dots, E_n) = |A\, E_1,\ E_2, \dots, E_n| + |E_1, A\, E_2, \dots, E_n| + \cdots + |E_1,\ E_2, \dots, A\, E_n|$$
$$= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = Tr(A)$$

Ainsi :

$$|W(x)|' = Tr\big(A(x)\big)\, |W(x)|$$

Il s'ensuit la propriété.

<u>Remarque</u> :

En supposant déterminée une famille $\big(\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)\big)$ de n solutions de (H) dont le Wronskien ne s'annule pas (il suffit pour cela, d'après ce qui précède, de le vérifier en un seul point x_0) il est possible de retrouver le fait que c'est une base de (H) sans invoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Voici comment.

Pour chaque x de l'intervalle I, les vecteurs colonnes de la famille $\big(\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)\big)$ forment une base de $\mathbb{K}_c^n$, l'espace vectoriel des vecteurs colonnes d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Ainsi, toute fonction Φ dérivable de I dans $\mathbb{K}_c^n$ peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi(x) = \alpha_1(x)\, \Phi_1(x) + \alpha_2(x)\, \Phi_2(x) + \cdots + \alpha_n(x)\, \Phi_n(x)$$

Posons alors :

$$Z(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \\ \vdots \\ \alpha_n(x) \end{pmatrix}$$

et dérivons Φ :

$$\Phi'(x) = \alpha'_1(x)\,\Phi_1(x) + \alpha'_2(x)\,\Phi_2(x) + \cdots + \alpha'_n(x)\,\Phi_n(x) + \alpha_1(x)\,\Phi'_1(x) + \alpha_2(x)\,\Phi'_2(x) + \cdots + \alpha_n(x)\,\Phi'_n(x)$$

$$= W(x)\,Z'(x) + \alpha_1(x)\,A(x)\,\Phi_1(x) + \alpha_2(x)\,A(x)\,\Phi_2(x) + \cdots + \alpha_n(x)\,A(x)\,\Phi_n(x)$$

Soit finalement :

$$\Phi'(x) = W(x)\,Z'(x) + A(x)\,\Phi(x)$$

D'où :

$$\Phi \text{ solution de } (H) \Leftrightarrow \forall\, x \in I :\ \Phi'(x) = A(x)\,\Phi(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x \in I :\ W(x)\,Z'(x) = 0$$

(le déterminant de $W(x)$ étant le Wronskien, il n'est pas nul, donc $W(x)$ est inversible)

$$\Leftrightarrow \forall\, x \in I :\ Z'(x) = 0$$

On en déduit que les solutions de (H) sont les fonctions de la forme :

$$\Phi(x) = \alpha_1\,\Phi_1(x) + \alpha_2\,\Phi_2(x) + \cdots + \alpha_n\,\Phi_n(x)$$

Où les α_i sont des constantes.

V Méthode de variation des constantes

Pour déterminer une solution particulière du système différentiel complet (E) on peut s'inspirer de la démarche de la remarque précédente en cherchant cette solution sous la forme :

$$\Phi_P(x) = \alpha_1(x)\,\Phi_1(x) + \alpha_2(x)\,\Phi_2(x) + \cdots + \alpha_n(x)\,\Phi_n(x)$$

où les α_i sont des fonctions dérivables sur I et poser :

$$Z(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \\ \vdots \\ \alpha_n(x) \end{pmatrix}$$

Alors, Φ_P est solution sur I si et seulement si :

$$W(x)\,Z'(x) + A(x)\,\Phi_P(x) = A(x)\,\Phi_P(x) + B(x)$$

Soit :

$$W(x)\,Z'(x) = B(x)$$

Nous sommes alors ramenés à résoudre un système conduisant à :

$$Z'(x) = W(x)^{-1}\,B(x)$$

Les coefficients de $Z(x)$ peuvent alors être déterminés à une constante multiplicative près, par intégration, laquelle ne donne pas toujours de solutions analytiques.

Exemple d'application de la méthode dans le cas d'une équation différentielle du second ordre :

Considérons une équation différentielle linéaire du second ordre de la forme :

$$y'' = a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y + b(x) \qquad (E')$$

Le système différentiel associé est :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0(x) & a_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Supposons avoir déterminé une base de solutions $\big(\varphi_1(x), \varphi_2(x)\big)$ de l'équation homogène (H') associée à (E'). Définissons alors :

$$\Phi_1(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ {\varphi'}_1(x) \end{pmatrix}, \qquad \Phi_2(x) = \begin{pmatrix} \varphi_2(x) \\ {\varphi'}_2(x) \end{pmatrix}$$

La famille $\big(\Phi_1(x), \Phi_2(x)\big)$ est alors une base de solutions du système homogène (H) associée à (E).

Une solution particulière de (E) se cherche alors sous forme :

$$\Phi_P(x) = \alpha_1(x)\, \Phi_1(x) + \alpha_2(x)\, \Phi_2(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ {\varphi'}_1(x) & {\varphi'}_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \end{pmatrix}$$

Et elle s'obtient en résolvant le système :

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ {\varphi'}_1(x) & {\varphi'}_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {\alpha'}_1(x) \\ {\alpha'}_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} {\alpha'}_1(x) \\ {\alpha'}_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\varphi_1(x)\, {\varphi'}_2(x) - \varphi_2(x)\, {\varphi'}_1(x)} \begin{pmatrix} {\varphi'}_2(x) & -\varphi_2(x) \\ -{\varphi'}_1(x) & \varphi_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Ne reste plus qu'à intégrer en espérant obtenir des primitives analytiques faute de quoi, il faudra se contenter de formulations intégrales du genre :

$$\begin{cases} \alpha_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{-\varphi_2(x)\, b(x)}{\varphi_1(x)\, {\varphi'}_2(x) - \varphi_2(x)\, {\varphi'}_1(x)}\, dx \\ \alpha_2(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi_1(x)\, b(x)}{\varphi_1(x)\, {\varphi'}_2(x) - \varphi_2(x)\, {\varphi'}_1(x)}\, dx \end{cases}$$

VI Cas particulier des systèmes différentiels linéaires à matrice constante

On se place ici dans le cas où $A(x) = A$ est une matrice à coefficients constants (indépendants de x) et on s'intéresse à la résolution du système homogène (H), lequel s'écrit :

$$Y' = A\ Y$$

Dans le cas où la matrice ne possède qu'un seul terme, on a affaire à une équation scalaire de la forme :

$$y' = a\, y$$

qui se résout en :

$$y = y(0)\, e^{a\,x} = y(0) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k\, x^k}{k!}$$

Cela invite, par analogie, à définir dans le cas plus général où A est une matrice quelconque, un concept d'exponentielle de matrice qui conduirait à une solution générale de la forme :

$$Y = e^{x\,A}\, Y(0) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\, A^k \right) Y(0)$$

Voyons ce concept :

<u>Exponentielle d'une matrice carrée :</u>

Soit A une matrice carrée d'ordre p. On définit l'exponentielle de cette matrice comme étant :

$$\boldsymbol{e^{\,A} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\, A^k \; = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, A^k}$$

Cette limite étant définie pour une norme quelconque sur l'ensemble $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C}$. Nous prendrons pour norme :

$$\boldsymbol{|||A||| = sup_{\{X\in\mathbb{K}_c^p\ :\ \|X\|=1\}}\,(\|A\,X\|) = sup_{\{X\in\mathbb{K}_c^p\ :\ \|X\|\neq 0\}} \left(\frac{\|A\,X\|}{\|X\|}\right)}$$

La norme prise sur $\mathbb{K}_c^p$ étant par exemple la norme infinie :

$$\boldsymbol{\|X\| = sup_{1\le i\le p}\,(|X[i]|)}$$

L'exponentielle de la matrice nulle est la matrice identité d'ordre p :

$$\boldsymbol{e^{\,0} = I_p}$$

La norme matricielle présente la propriété pour 2 matrices carrées de même ordre p :

$$\boldsymbol{|||A\,B||| \le |||A|||\ \ |||B|||}$$

Et si ces matrices commutent :

$$\boldsymbol{e^{\,A+B} = e^{\,A}\, e^{\,B}}$$

$$\boldsymbol{e^{-A} = \left(e^{A}\right)^{-1}}$$

<u>Preuves</u> :

1) norme du produit matriciel

Soit $X \in \mathbb{K}_c^p$ tel que $\|X\| = 1$ alors :

$$\|A\,B\,X\| = \|A\,(B\,X)\| \le |||A|||\ \|B\,X\| \le |||A|||\ |||B|||\ \|X\| = |||A|||\ |||B|||$$

Donc :

$$|||A\,B||| = sup_{\{X\in\mathbb{K}_c^p\ :\ \|X\|=1\}}\,(\|A\,X\|) \le |||A|||\ |||B|||$$

2) cas de deux matrices qui commutent :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{q=0}^{k} \frac{k!}{q!\ (k-q)!} A^q\ B^{k-q} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{q=0}^{k} \left(\frac{1}{q!} A^q\right) \left(\frac{1}{(k-q)!} B^{k-q}\right) =$$

Visualisons à l'aide d'un tableau, les éléments de cette somme. Pour une valeur de k donnée, les éléments de la somme allant de 0 à k se situent sur une diagonale montante (en jaune).

	I_p	B	$\frac{1}{2!}B^2$	$\cdots$	$\frac{1}{(k-1)!}B^k$	$\frac{1}{k!}B^k$
I_p	I_p	B	$\frac{1}{2!}B^2$	$\cdots$	$\frac{1}{(k-1)!}B^k$	$\frac{1}{k!}B^k$
A	A	$A\ B$	$\frac{1}{2!}A\ B^2$	$\cdots$	$\frac{1}{(k-1)!}A\ B^k$	
$\frac{1}{2!}A^2$	$\frac{1}{2!}A^2$	$\frac{1}{2!}A^2\ B$				
$\vdots$	$\vdots$					
$\frac{1}{(k-1)!}A^k$	$\frac{1}{(k-1)!}A^k$	$\frac{1}{(k-1)!}A^k\ B$				
$\frac{1}{k!}A^k$	$\frac{1}{k!}A^k$					

Les éléments de la somme sont donc situés dans la zone en forme de triangle et représentée en orange dans le tableau qui suit :

	I_p	B	$\frac{1}{2!}B^2$	$\cdots$	$\frac{1}{(n-1)!}B^n$	$\frac{1}{n!}B^n$
I_p	I_p	B	$\frac{1}{2!}B^2$	$\cdots$	$\frac{1}{(n-1)!}B^n$	$\frac{1}{n!}B^n$
A	A	$A\,B$	$\frac{1}{2!}A\,B^2$	$\cdots$	$\frac{1}{(n-1)!}A\,B^n$	
$\frac{1}{2!}A^2$	$\frac{1}{2!}A^2$	$\frac{1}{2!}A^2\,B$				
$\vdots$	$\vdots$					
$\frac{1}{(n-1)!}A^n$	$\frac{1}{(n-1)!}A^n$	$\frac{1}{(n-1)!}A^n\,B$				
$\frac{1}{n!}A^n$	$\frac{1}{n!}A^n$					

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,(A+B)^k = \sum_{\substack{0\le q\le n\\ 0\le r\le n\\ q+r\le n}}\left(\frac{1}{q!}A^q\right)\left(\frac{1}{r!}B^r\right)$$

La somme peut donc être exprimée par différence entre la somme des termes situés dans un carré (zone orange et vert clair) et celle des termes situés dans la zone représentée en vert clair, soit :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,(A+B)^k = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,A^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,B^k\right) - \sum_{\substack{0\le q\le n\\ 0\le r\le n\\ n<q+r\le 2\,n}}\left(\frac{1}{q!}A^q\right)\left(\frac{1}{r!}B^r\right)$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,A^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,B^k\right) = e^{\,A}\,e^{\,B}$$

Et :

$$\left|\left|\left| \sum_{\substack{0\le q\le n\\ 0\le r\le n\\ n<q+r\le 2\,n}} \left(\frac{1}{q!}A^q\right)\left(\frac{1}{r!}B^r\right) \right|\right|\right| \le \sum_{\substack{0\le q\le n\\ 0\le r\le n\\ n<q+r\le 2\,n}} \left(\frac{1}{q!}|||A|||^q\right)\left(\frac{1}{r!}|||A|||^r\right)$$

Et la quantité majorante n'est autre que :

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\;|||A|||^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\;|||B|||^k\right)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\;(|||A|||+|||B|||)^k$$

quantité qui, lorsque n tend vers l'infini, tend vers :

$$e^{\,|||A|||}\,e^{\,|||B|||}-e^{\,|||A|||+|||B|||}=0$$

Il en résulte :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\;(A+B)^k\;=e^{\,A}\,e^{\,B}$$

D'où :

$$e^{\,A+B}\;=e^{\,A}\,e^{\,B}$$

Il en découle :

$$e^{\,A+(-A)}\;=e^{\,A}\,e^{-A}=e^{\,0}\;=I_p$$

D'où :

$$e^{-A}=(e^{\,A})^{-1}$$

<u>Solution générale d'un système différentiel à matrice constante</u>

Reprenons le système différentiel homogène initial :

$$Y'=A\;\;Y\quad\;(H)$$

et considérons la fonction :

$$\Phi(x)=e^{x\,A}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\;A^k$$

Alors Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\Phi'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\;A^k\;\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\;A^{k+1}\;=A\,e^{x\,A}=A\,\Phi(x)$$

Donc Φ est solution de (H).

Alors, $e^{-x\,A}$ étant inversible pour tout x , on a :

$$Y\ solution\ de\ (H) \Leftrightarrow\ Y' - A\ \ Y = 0$$

$$\Leftrightarrow\ e^{-x\,A}\,Y' - A\ \ e^{-x\,A}\,Y = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (e^{-x\,A}\,Y)' = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}:\ \ e^{-x\,A}\,Y = e^{-0\,A}\,Y(0)$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}:\ \ \ Y = e^{x\,A}\,Y(0)$$

Les solutions d'un système différentiel homogène $\boldsymbol{Y' = A\ \ Y}$ sont donc les fonctions de la forme :

$$\boldsymbol{Y = e^{x\,A}\,Y_0}, \qquad \boldsymbol{Y_0} \in \mathbb{K}$$

Cas d'une matrice nilpotente :

La méthode de résolution par exponentielle s'avère particulièrement bien adaptée dans le cas où A est une matrice nilpotente. Car il existe dans ce cas un entier naturel m appelé indice de nilpotence, tel que : $A^m = 0, A^{m-1} \neq 0$. Les solutions s'expriment alors simplement sous forme :

$$\boldsymbol{Y = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!}\,A^k\ \ Y_0}, \qquad \boldsymbol{Y_0} \in \mathbb{K}$$

Cas d'une matrice diagonalisable :

Si A est diagonalisable alors, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

Alors :

$$e^{x\,A} = P\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\,D^k\right)P^{-1}$$

Et si D a pour diagonale $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\,D^k\ = diag\left(e^{d_1\,x}, e^{d_2\,x}, \dots, e^{d_n\,x}\right) = D'(x)$$

On peut alors aisément en déduire par calcul $e^{x\,A} = P\,D'(x)\,P^{-1}$

On retrouve ce résultat directement en posant : $Y = P\,Z$ et en notant que :

$$Y \text{ solution de } (H) \Leftrightarrow Y' = A\ Y$$

$$\Leftrightarrow\ P\,Z' = A\ P\,Z$$

$$\Leftrightarrow\ Z' = P^{-1}\,A\ P\,Z$$

$$\Leftrightarrow\ Z' = D\,Z$$

$$\Leftrightarrow\ Z = D'(x)\,Z(0)$$

$$\Leftrightarrow\ P^{-1}\,Y = D'(x)\,P^{-1}\ Y(0)$$

$$\Leftrightarrow\ Y = P\,D'(x)\,P^{-1}\,Y(0)$$

<u>Cas d'une matrice trigonalisable</u> :

Si A est trigonalisable alors, il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que :

$$A = P\,T\,P^{-1}$$

Dans ce cas, le calcul de l'exponentiel de la matrice n'est pas forcément simple et on peut poser $Y = P\,Z$ pour se ramener, avec une démarche analogue à la précédente, à un système différentiel triangulaire :

$$Z' = T\,Z$$

lequel peut se résoudre en partant de la dernière équation et en remontant.