Suites de référence

I Suites arithmétiques

1) Définition

Une suite arithmétique est une suite récurrente d'ordre 1, associée à une fonction de la forme $f(x) = x + a$. C'est donc une suite du type :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + a \\ U_0 = b \end{cases}$$

Où a et b sont deux réels quelconques.

2) Expression explicite à partir du terme de rang 0

Un tableau de valeurs nous montre qu'on peut facilement obtenir une expression explicite d'une telle suite.

Rang n	0	1	2	3	4	...	n	...
Terme U_n	b	$b + a$	$b + 2\,a$	$b + 3\,a$	$b + 4\,a$	...	$b + n\,a$	...

Nous voyons en effet que l'on a :

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} :\ \boldsymbol{U_n = a\,n + b}}$$

La suite U est donc une fonction affine de n.

Réciproquement, toute fonction affine de n est de façon évidente une suite arithmétique. En effet.

Si :

$$U_n = a\,n + b$$

alors :

$$U_{n+1} = a\,(n+1) + b = a\,n + b + a$$

Donc :

$$U_{n+1} = U_n + a$$

Les suites arithmétiques sont donc les suites formées par les fonctions affines de $\boldsymbol{n}$

3) <u>Expression explicite à partir d'un terme de rang quelconque</u>

Soit un couple d'entiers naturels $(n\,,p)$ pour les rangs desquels les termes sont définis, alors :

$$U_n = a\,n + b$$

$$U_p = a\,p + b$$

Par soustraction membre à membre, on en déduit :

$$U_n - U_p = a\,(n-p)$$

D'où on peut tirer deux formules, la première étant l'expression de U_n en fonction de a et de U_p :

$$\boxed{\boldsymbol{U_n = a\,(n-p) + U_p}}$$

A noter, que si on considère la fonction affine $g(x) = a\,x + b$ qui donne $U_n = g(n)$ alors la relation ci-dessus n'est qu'une relation bien connue concernant les fonctions affines :

$$g(n) = a\,(n-p) + g(p)$$

Ou encore, d'un point de vue graphique, en notant M le point de coordonnées $(x = n\,; y = U_n)$ et A le point de coordonnées $\left(x_A = p\,; y_A = U_p\right)$:

$$y = a\,(x - x_A) + y_A$$

Où on reconnaît l'équation de la droite de coefficient directeur a et passant par A

La seconde expression est déduite de la première pour $n \neq p$

$$\boxed{\boldsymbol{a = \frac{U_n - U_p}{n-p} = \frac{g(n) - g(p)}{n-p} = \frac{y - y_A}{x - x_A}}}$$

4) <u>Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique</u>

On attribue à Gauss le procédé qui permet de calculer simplement une somme telle que :

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

L'idée du petit Gauss, alors âgé de moins de dix ans, fut d'effectuer la somme, non pas dans l'ordre, comme il l'aurait sûrement appris à l'école, mais en additionnant 1 avec 100 puis 2 avec 99, puis 3 avec 98, etc puisque ces sommes font toujours 101. Ainsi son procédé consiste à écrire :

$$S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (50 + 51)$$

ce qui donne :

$$S = 50 \times 101 = 5050$$

En revanche, le procédé diffère si le nombre de terme est impair. Prenons en effet :

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

$$S = (1 + 7) + (2 + 6) + (3 + 5) + 4$$

Il y a donc un 4 qui se retrouve tout seul

Afin de conserver un procédé général élégant, il suffit de le modifier légèrement. Reprenons la première somme et réécrivons la à l'envers juste en dessous :

$$S = \quad 1 \quad + \;2 \quad + \;3 + \cdots \; + 98 + 99 + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 \quad + 2 \quad + \quad 1$$

En additionnant cette somme à elle-même, par association de termes de même position, nous avons :

$$S = 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 + 101$$

Soit

$$2\,S = 100 \times 101$$

Et :

$$S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

Nous voyons que cette somme s'obtient en additionnant le premier terme au dernier, en multipliant le résultat par le nombre de termes et en divisant par deux.

Ce procédé est général pour les sommes de termes en progression arithmétique, voyons un autre exemple concret :

$$S = 5 + 10 + 15 + 20 + 25$$

$$S = 25 + 20 + 15 + 10 + 5$$

$$2\,S = 30 + 30 + 30 + 30 + 30$$

$$S = \frac{30 \times 5}{2} = 75$$

Voyons en une preuve dans le cas général. La somme de termes en progression arithmétique peut toujours être associée à une suite arithmétique U sous la forme :

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

Ainsi :

$$S = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

Appliquons le procédé décrit précédemment :

$$S = \quad U_0 \quad + \quad U_1 \quad + U_2 \quad + \cdots + U_n$$

$$S \qquad = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \cdots + U_0$$

$$2\,S \qquad = (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + \cdots + (U_0 + U_n)$$

Or il y a dans la somme, $n + 1$ termes, donc :

$$\boxed{\boldsymbol{S = \frac{(U_0 + U_n)\,(n + 1)}{2}}}$$

Nous retiendrons :

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique = (premier terme + dernier terme)x nombre de termes/2

<u>Exemple</u> :

La suite $U_n = 3\,n - 1$ est une suite arithmétique de raison 3. Donc :

$$\sum_{k=3}^{20} (3\,k - 1) = \sum_{k=3}^{20} U_k = \frac{(U_3 + U_{20}) \times 18}{2} = (8 + 59) \times 9 = 67 \times 9 = 603$$

Noter que pour savoir combien il y a de termes, il suffit de se dire qu'il y a 20 termes depuis le rang 1 inclus jusqu'au rang 20 inclus, et 2 termes depuis le rang 1 inclus jusqu'au rang 2 inclus, donc $(20-2=18)$ depuis le rang 3 inclus jusqu'au rang 20 inclus.

II Suites géométriques

1) Définition

Une suite géométrique est une suite récurrente d'ordre 1, associée à une fonction de la forme $f(x) = a\,x$. C'est donc une suite du type :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n \times a \\ U_0 = b \end{cases}$$

Où a et b sont deux réels quelconques.

2) Expression explicite à partir du terme de rang 0

Un tableau de valeurs nous montre qu'on peut facilement obtenir une expression explicite d'une telle suite.

Rang n	0	1	2	3	4	...	n	...
Terme U_n	b	$b \times a$	$b \times a^2$	$b \times a^3$	$b \times a^4$	...	$b \times a^n$	...

Nous voyons en effet que l'on a :

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} :\ \boldsymbol{U_n = b \times a^n}}$$

Lorsque $a > 0$ la suite U est donc une fonction exponentielle de n.

Réciproquement, toute suite ayant une expression explicite de la forme précédente est une suite arithmétique. En effet.

Si :

$$U_n = b \times a^n$$

alors :

$$U_{n+1} = b \times a^{n+1} = b \times a^n \times a$$

Donc :

$$U_{n+1} = U_n \times a$$

Les suites arithmétiques sont donc les suites de la forme $\boldsymbol{U_n = b \times a^n}$, a et b étant des réels quelconques.

3) <u>Expression explicite à partir d'un terme de rang quelconque</u>

Soit un couple d'entiers naturels $(n\,,p)$ pour les rangs desquels les termes sont définis, alors :

$$U_n = b \times a^n$$

$$U_p = b \times a^p$$

Par division membre à membre, on en déduit :

$$\frac{U_n}{U_p} = a^{n-p}$$

D'où on peut tirer l'expression de U_n en fonction de a et de U_p :

$$\boxed{\boldsymbol{U_n = U_p \times a^{n-p}}}$$

4) <u>Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique</u>

Commençons par une somme simple comme :

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}$$

$$2\,S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{11}$$

La soustraction membre à membre donne :

$$2\,S - S = 2^{11} - 1$$

Ce qui donne :

$$S = 2^{11} - 1 = 2047$$

Poursuivons avec une forme plus générale :

$$S = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$$

$$a \times S = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n+1}$$

La soustraction membre à membre donne :

$$a\,S - \ S = a^{n+1} - 1$$

Soit :

$$S(a-1) = a^{n+1} - 1$$

Donc si $a \neq 1$:

$$\boxed{\mathbf{1 + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^2 + \cdots + \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}+1} - 1}{\boldsymbol{a} - 1} = \frac{1 - \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}+1}}{1 - \boldsymbol{a}}}}$$

Voyons maintenant le cas général. La somme de termes en progression géométrique peut toujours être associée à une suite arithmétique U sous la forme :

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

Soit :

$$S = U_0 + U_0 \times a + U_0 \times a^2 + \cdots + U_0 \times a^n$$

$$S = U_0 \ \times (1 + a + a^2 + \cdots + a^n)$$

donc :

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}_0 \times \frac{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}+1} - \mathbf{1}}{\boldsymbol{a} - \mathbf{1}} = \boldsymbol{U}_0 \times \frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}+1}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{a}}}$$

Nous retiendrons :

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique = premier terme x (raison à la puissance le nombre de termes -1)/(raison – 1)

Exemple :

La suite $U_n = 1/2^n$ est une suite arithmétique de raison 1/2. Donc :

$$\sum_{k=3}^{10} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=3}^{10} U_k = \frac{1}{2^3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{256}\right) = \frac{255}{1024}$$

III Suites arithméticogéométriques

1) Définition

Une suite arithméticogéométrique est une suite récurrente d'ordre 1, associée à une fonction de la forme $f(x) = a\,x + b$. C'est donc une suite du type :

$$\begin{cases} U_{n+1} = \; a\,U_n + b \\ \qquad U_0 = b \end{cases}$$

où a et b sont deux réels avec $a \neq 1$

2) Expression explicite à partir du terme de rang 0

Cherchons la limite éventuelle en résolvant :

$$x = a\,x + b$$

$$x - a\,x = b$$

$$x\,(1 - a) = b$$

$$x \;= \frac{b}{1 - a}$$

La suite n'admet donc qu'une seule limite éventuelle :

$$L \;= \frac{b}{1 - a}$$

Faisons le changement de suite :

$$V_n = U_n - L$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_{n+1} = U_{n+1} - L$$

$$V_{n+1} = a\,U_n + b - L$$

$$V_{n+1} = a\,U_n + b - (a\,L +)b$$

$$V_{n+1} = a\,(U_n - L)$$

$$V_{n+1} = a\,V_n$$

La suite V est donc une suite géométrique de raison a. Donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \; V_n = V_0 \times a^n$$

Il est alors aisé d'en déduire la forme explicite de U en inversant la relation :

$$V_n = U_n - L$$

$$U_n = V_n + L$$

Ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : U_n = V_0 \times a^n + L = (b - L) \times a^n + L$$

Nous avons alors quatre cas possibles :

$|a| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = L$

$a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty \; ou - \infty$

$a < -1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n} = +\infty \;(\text{ou} - \infty) \,;\, \lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n+1} = -\infty \;(\text{ou} + \infty)$

$q = -1 \Rightarrow U_{2n} = b \,; U_{2n+1} = b - 2\,L$

IV Suites homographiques

1) Définition

Une suite homographique est une suite récurrente d'ordre 1, associée à une fonction de la forme :

$$f(x) = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}$$

où , b, c, d sont des réels tels que : $c \neq 0$ et $a\,d - b\,c \neq 0$

 C'est donc une suite du type :

$$\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{a\,U_n + b}{c\,U_n + d} \\ U_0 = b \end{cases}$$

<u>Expression explicite</u>

Rappelons qu'une fonction homographique peut se mettre de façon unique sous une forme canonique :

$$f(x) = \frac{k}{x-\alpha} + \beta$$

Avec :

$$\alpha = -\frac{d}{c} \text{ (valeur interdite) ; } \beta = \frac{a}{c} \text{ (valeur limite en } +\infty\text{) ; } k = -\frac{a\,d - b\,c}{c^2}$$

La relation de récurrence prend alors la forme

$$U_{n+1} = \frac{k}{U_n - \alpha} + \beta$$

Cherchons alors les limites éventuelles en résolvant :

$$x = \frac{k}{x-\alpha} + \beta$$

$$x - \beta = \frac{k}{x-\alpha}$$

$$(x-\alpha\,)(x-\beta) = k$$

$$x^2 - (\alpha+\beta)\,x + \alpha\,\beta - k = 0$$

Le discriminant de ce trinôme est :

$$\Delta = (\alpha+\beta)^2 - 4\,(\alpha\,\beta - k) = (\alpha-\beta)^2 + 4\,k$$

<u>1^er^ cas : $\Delta \neq 0$</u>

Le trinôme a deux racines distinctes L_1 et L_2, qui sont les deux limites éventuelles et qui vérifient, si nous désignons par $a\,, b, c$ les coefficients du trinôme :

$$L_1 + L_2 = -\frac{b}{a} = \alpha + \beta$$

$$L_1 L_2 = \frac{c}{a} = \alpha\,\beta - k$$

Faisons alors le changement de suite :

$$V_n = \frac{U_n - L_1}{U_n - L_2}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - L_1}{U_{n+1} - L_2}$$

$$V_{n+1} = \frac{\dfrac{k}{U_n - \alpha} + \beta - L_1}{\dfrac{k}{U_n - \alpha} + \beta - L_2}$$

$$V_{n+1} = \frac{k + (\beta - L_1)\,(U_n - \alpha)}{k + (\beta - L_2)\,(U_n - \alpha)}$$

$$V_{n+1} = \frac{k - \alpha\,\beta + \alpha\,L_1 + (\beta - L_1)\,U_n}{k - \alpha\,\beta + \alpha\,L_2 + (\beta - L_2)\,U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{-L_1 L_2 + \alpha\,L_1 + (\beta - L_1)\,U_n}{-L_1 L_2 + \alpha\,L_2 + (\beta - L_2)\,U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{L_1(-L_2 + \alpha)\; + (\beta - L_1)\,U_n}{L_2(-L_1 + \alpha) + (\beta - L_2)\,U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{L_1(L_1 - \beta)\; + (\beta - L_1)\,U_n}{L_2(L_2 - \beta) + (\beta - L_2)\,U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{(\beta - L_1)\;\,(U_n - L_1)}{(\beta - L_2)\;\,(U_n - L_2)}$$

$$V_{n+1} = \frac{\beta - L_1}{\beta - L_2}\,V_n$$

La suite V est donc une suite géométrique de raison :

$$q = \frac{\beta - L_1}{\beta - L_2}$$

Donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\;\; V_n = \;V_0 \times q^n$$

Il est alors aisé d'en déduire la forme explicite de U en inversant la relation :

$$V_n = \frac{U_n - L_1}{U_n - L_2}$$

$$V_n(U_n - L_2) = U_n - L_1$$

$$V_n\, U_n - U_n = V_n\, L_2 - L_1$$

$$U_n\, (V_n\ - 1) = V_n\, L_2 - L_1$$

$$U_n = \frac{V_n\, L_2 - L_1}{V_n\ - 1}$$

Soit :

$$U_n = \frac{V_0\, L_2 q^n - L_1}{V_0\, q^n\ - 1}$$

Nous avons alors quatre cas possibles :

$|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L_1$

$q > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L_2$

$q < -1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (-q)^n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L_2$

$q = -1 \Rightarrow U_{2n} = \dfrac{V_0\, L_2 - L_1}{V_0\ - 1}\ ; U_{2n+1} = \dfrac{V_0\, L_2 + L_1}{V_0 + 1}$

<u>2ème cas : Δ= 0</u>

Le trinôme a une racine double L qui vérifie :

$$2\, L = \alpha + \beta$$

D'autre part :

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\, (\alpha\, \beta - k) = 0$$

Donc :

$$4\, L^2 - 4\, \alpha\, \beta + 4\, k = 0$$

Donc :

$$k - \alpha\, \beta = -\, L^2$$

Posons :

$$V_n = \frac{1}{U_n - L}$$

Alors :

$$V_{n+1} = \frac{1}{\frac{k}{U_n - \alpha} + \beta - L}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n - \alpha}{k + (\beta - L)\,(U_n - \alpha)}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n - \alpha}{k - \alpha\,\beta + \alpha\,L + (\beta - L)\,U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n - \alpha}{-\,L^2 + \alpha\,L + (\beta - L)\,U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n - \alpha}{L(-L + \alpha) + (\beta - L)\,U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n - \alpha}{L(L - \beta) + (\beta - L)\,U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n - \alpha}{(\beta - L)\,(U_n - L)}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n - L + L - \alpha}{(\beta - L)\,(U_n - L)}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n - L}{(\beta - L)\,(U_n - L)} + \frac{(\beta - L)}{(\beta - L)\,(U_n - L)}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{\beta - L} + \frac{1}{U_n - L}$$

$$V_{n+1} = V_n + \frac{1}{\beta - L}$$

V est donc une suite arithmétique de raison :

$$r = \frac{1}{\beta - L}$$

Donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\;\; V_n = r\,n + \,V_0$$

Il est alors aisé d'en déduire la forme explicite de U en inversant la relation :

$$V_n = \frac{1}{U_n - L}$$

$$U_n = \frac{1}{V_n} + L$$

Soit finalement :

$$U_n = \frac{1}{r\,n + \,V_0} + L$$

On a donc dans tous les cas :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = L$$