Suites récurrentes d'ordre 1

I Rappel-Définition

Une suite récurrente d'ordre 1 est une suite définie par une relation de récurrence de la forme :

$$\begin{cases} U_{n+1} = f(U_n) \\ U_0 = a \end{cases}$$

où f est une fonction explicite de la variable réelle généralement.

Le comportement d'une telle suite, type de variation, limite, peut faire l'objet de conjectures à partir d'un graphique sur lequel on porte, dans un repère orthonormé du plan, la courbe d'équation $y = f(x)$ ainsi que la bissectrice intérieure du système d'axes d'équation $y = f(x)$.

II Résultats préliminaires sur les limites

1) Composition des limites

Si f est une fonction sur un intervalle *I* de réels comprenant tous les termes de la suite, au moins à partir d'un certain rang, alors nous avons :

Si on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{U_n} = \boldsymbol{L}$$

$$\lim_{x\to L} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{L'} \ (\mathbf{ou} + \infty \ \mathbf{ou} - \infty)$$

alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{f(U_n)} = \boldsymbol{L'} \ (\mathbf{ou} + \infty \ \mathbf{ou} - \infty)$$

Preuve (cas L' uniquement, les autres étant analogues)

soit un réel $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists\, \alpha > 0 \ : \forall\, x \in \mathbb{R} : \ L - \alpha < x < L + \alpha \Rightarrow L' - \varepsilon < \ f(x) < L' + \varepsilon$$

Pour $\alpha > 0$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow \ L - \alpha < U_n < L + \alpha$$

$$\Rightarrow \ L' - \varepsilon < \ f(U_n) < L' + \varepsilon$$

ce qui prouve la propriété.

2) Limite d'une suite extraite

Soit g une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On appelle suite extraite de la suite U, une suite V de la forme :

$$V_n = U_{g(n)}$$

Exemples :

$V_n = U_{n+1}$ est la suite dont le graphe est obtenu par translation d'une unité vers la gauche de celui de U

$V_n = U_{2\,n}$ est la suite des termes de rang pair

$V_n = U_{2\,n+1}$ est la suite des termes de rang impair

Propriété vis-à-vis de la limite :

Si on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{U_n} = \boldsymbol{L}\ (\mathbf{ou} + \infty\ \mathbf{ou} - \infty)$$

alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{V_n} = \boldsymbol{L}\ (\mathbf{ou} + \infty\ \mathbf{ou} - \infty)$$

Preuve (cas L uniquement) :

soit un réel $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow\ L - \varepsilon < U_n < L + \varepsilon$$

g étant strictement croissante, on a nécessairement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{g(n)} = +\infty}$$

En effet, pour un entier naturel fixé m :

$$g(m+1) > g(m) \text{ donc } g(m+1)) \geq g(m) + 1$$

$$g(m+2) > g(m+1) \text{ donc } g(m+2)) \geq g(m+1) + 1) \geq g(m) + 2$$

etc

On aboutit pour tout entier naturel k à :

$$g(m+k) \geq g(m) + k$$

Soit en posant $m + k = n$:

$$g(n) \geq g(m) + n - m$$

Or pour m fixé :

$$\lim_{n\to+\infty} g(m) + n - m = +\infty$$

Le théorème du gendarme minorant assure la propriété

On en déduit pour $A = n_0 + 1$:

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \forall\, n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow\ g(n) > n_0 + 1 > n_0$$

$$\Rightarrow\ L - \varepsilon < U_{g(n)} < L + \varepsilon$$

$$\Rightarrow\ L - \varepsilon < V_n < L + \varepsilon$$

Ce qui achève la démonstration

III Limite éventuelle d'une suite récurrente d'ordre 1

Si $\boldsymbol{f}$ est une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ de réels comprenant tous les termes d'une suite $\boldsymbol{U}$ récurrente d'ordre 1, au moins à partir d'un certain rang, la suite étant définie par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{U_{n+1} = f(U_n)} \\ \boldsymbol{U_0 = a} \end{cases}$$

Alors, si $\boldsymbol{U}$ converge vers une limite $\boldsymbol{L}$, celle-ci est solution de l'équation

$$\boldsymbol{x = f(x)}$$

<u>Preuve</u> :

D'après les propriétés précédentes, si on a

$$\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} U_n = L$$

Le caractère fermé de l'intervalle $[a;b]$ et le fait que tous les termes y soient, impose que L soit dans $[a;b]$. En effet on a :

$$a \leq U_n \leq b$$

Par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit :

$$a \leq L \leq b$$

Or, f étant continue sur $[a;b]$, elle l'est en L et donc :

$$\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{L}} f(x) = f(L)$$

On en déduit :

$$\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} f(U_n) = f(L)$$

Or $V_n = U_{n+1}$ est une suite extraite de U donc :

$$\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} U_{n+1} = L$$

Par unicité de la limite, il vient :

$$f(L) = L$$

Remarque :

Attention, la réciproque est fausse. Ce n'est pas parce que L est solution de $f(x) = x$ que la suite U converge, ne serait-ce que parce que l'équation précédente peut avoir de multiples solutions (voir les exemples qui suivent à ce sujet)

IV Exemple d'étude

Exemple 1 : $f(x) = \sqrt{x+2}$

$$\begin{cases} U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \\ U_0 = a \end{cases}$$

Le domaine de définition de f est :

$$D_f = [-2; +\infty[$$

f est continue et strictement croissante (composée de fonctions strictement croissantes) sur D_f

Les limites éventuelles s'obtiennent en résolvant :

$$f(x) = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x$$

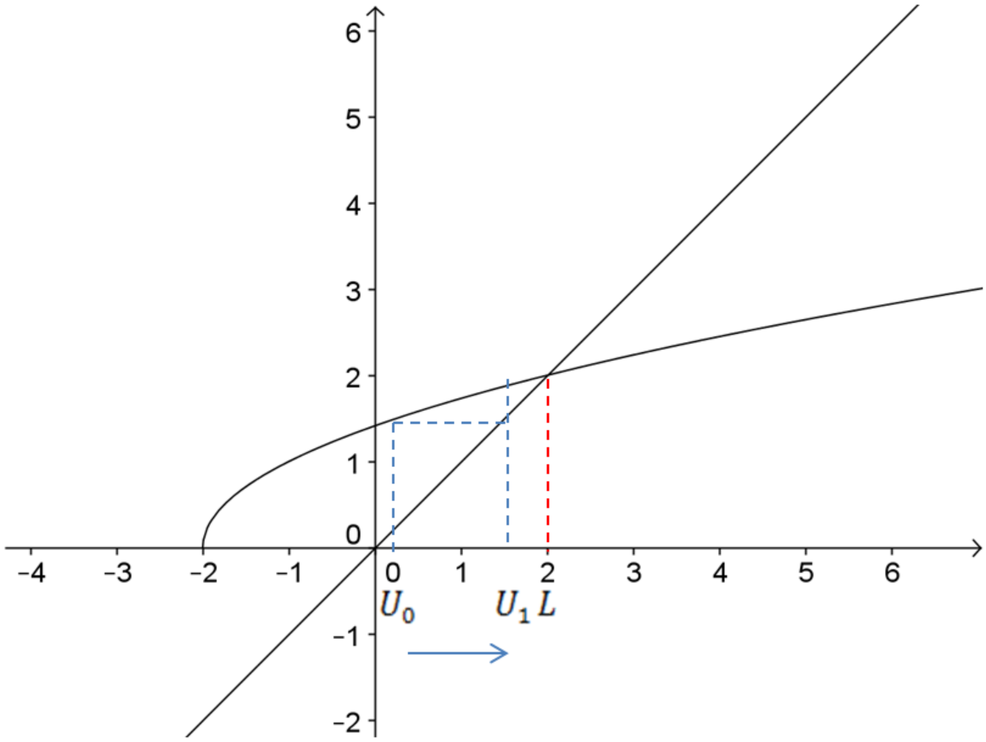
$$\Leftrightarrow x + 2 = x^2 \quad \text{et } x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{et } x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\,(x+1) = 0 \quad \text{et } x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

2 est donc la seule limite éventuelle. C'est l'abscisse du point d'intersection de la courbe d'équation : $y = \sqrt{x+2}$ et de la droite d'équation $y = x$



Le graphique amène aux conjectures suivantes :

Si $a < -2$ la suite n'est pas définie dès le rang 1

Si $-2 \leq a < 2$ la suite est strictement croissante et converge vers 2

Si $a = 2$ la suite est constante égale à 2

Si $a > 2$ la suite est strictement décroissante et converge vers 2

Preuve de la conjecture dans le cas $-2 \leq a < 2$:

Nous allons le faire par récurrence en considérant la propriété suivante :

$$P(n) = "U_n \ et \ U_{n+1} \ sont \ définis \ et : \ -2 \leq U_n < U_{n+1} < 2$$

Initialisation pour $n = 0$:

$U_0 = a \in D_f$ donc $U_1 = f(a)$ est défini

$$U_1 - U_0 = \sqrt{a+2} - a$$

Donc :

si : $-2 \leq a < 0$ alors $U_1 - U_0 > 0$

si : $0 \leq a < 2$ alors, en multipliant en haut et en bas par la quantité conjuguée :

$$U_1 - U_0 = \frac{a + 2 - a^2}{\sqrt{a+2} + a} = \frac{(2-a)\,(a+1)}{\sqrt{a+2} + a} > 0$$

On a donc bien : $U_0 < U_1$

<u>Hérédité</u> :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ vraie ,

alors U_{n+1} étant dans D_f son image U_{n+2} par f est définie

D'autre part on a :

$$-2 \leq U_n < U_{n+1} < 2$$

f étant strictement croissante sur D_f , on en déduit :

$$f(-2) \leq f(U_n) < f(U_{n+1}) < f(2)$$

Soit :

$$0 \leq U_{n+1} < U_{n+2} < 2$$

$P(n+1)$ est donc vraie

<u>Conclusion</u> :

$P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

U est donc une suite strictement croissante et majorée par 2. Elle est donc convergente.

On en déduit qu'elle tend vers 2, seule limite possible.

V Un critère de convergence

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle fermé borné $[a,b]$, à valeurs dans $[a,b]$ et telle que :

$$\exists\, \boldsymbol{k} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}[\ :\ \forall\, \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\ :\ |\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})| \le \boldsymbol{k}$$

alors la suite définie par la relation de récurrence suivante est convergente :

$$\begin{cases} \boldsymbol{U_{n+1}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U_n}) \\ \boldsymbol{U_0} \in [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] \end{cases}$$

Preuve :

Nous allons montrer que la suite est de Cauchy.

Soit $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^*$ alors en utilisant le théorème des accroissements finis, on a :

$$\exists\, c_{n,p} \in \ ]U_{n-1}, U_{n+p-1}[\ : f\left(U_{n+p-1}\right) - f(U_{n-1}) = \left(U_{n+p-1} - U_{n-1}\right) f'\left(c_{n,p}\right)$$

Ainsi :

$$\left|U_{n+p} - U_n\right| = \left|f\left(U_{n+p-1}\right) - f(U_{n-1})\right| \le k\left|U_{n+p-1} - U_{n-1}\right|$$

Et par une récurrence triviale :

$$\left|U_{n+p} - U_n\right| \le k^n \left|U_p - U_0\right|$$

Donc :

$$\left|U_{n+p} - U_n\right| \le k^n\,(b-a)$$

La suite majorante, qui est géométrique de raison k tend vers 0, donc :

Pour $\varepsilon > 0$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ \ n > n_0 \Rightarrow\ k^n\,(b-a) < \varepsilon$$

Ainsi :

$$\begin{matrix} n > n_0 \\ p > 0 \end{matrix} \Rightarrow \left|U_{n+p} - U_n\right| > \varepsilon$$

La suite vérifie donc le critère de Cauchy. $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ étant complets, on en déduit que cette suite, qu'elle soit à termes réels ou complexes , est convergente.