

Suites numériques (généralités) – propriétés de \mathbb{R}

I Preamble

Analyser les relations existant entre les grandeurs physiques de la nature consiste bien souvent à se donner toute une suite de mesures de ces grandeurs. Ainsi peut-on mesurer la hauteur de chute d'un objet, lâché sans vitesse initiale, à des intervalles de temps réguliers, et établir la loi de la chute des corps dans le vide, sous forme d'une relation continue entre hauteur et durée de chute : $h = 4,905 t^2$.

La suite est donc le prélude à l'établissement des lois de la Nature. D'un point de vue simple, une suite numérique est une liste ordonnée et sans fin de nombres réels, comme, la suite des nombres pairs :

0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; ...

ou bien la suite telle que chaque terme se déduise du précédent par multiplication par un même nombre, 2 par exemple :

1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; ...

ou bien encore, celle qui est telle qu'un des termes se déduise des deux précédents par simple addition, comme dans cette suite dite de Fibonacci :

1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; ...

II Définition mathématique

Une suite numérique est une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{R} . On la désigne généralement par une lettre, U par exemple. Ainsi :

$$U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow U(n)$$

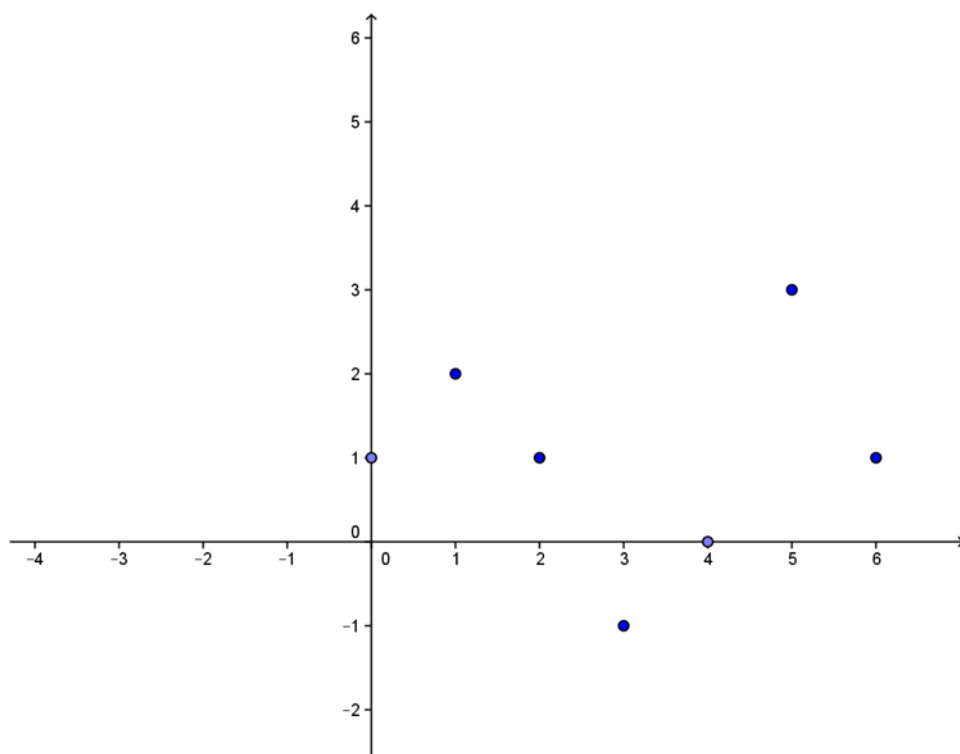
L'usage est cependant d'employer une notation indiquée pour l'image d'un entier naturel n . Ainsi $U(n)$ est noté U_n et est qualifié de terme de rang n .

L'ensemble des suites numériques est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On peut voir une suite de façon imagée comme un tableau de valeurs infini :

Rang n	0	1	2	3	4	...	n	$n + 1$...
Terme U_n	U_0	U_1	U_2	U_3	U_4	...	U_n	U_{n+1}	...

On peut représenter une suite par un graphique sous forme d'une succession de points.



III Suites explicites et suites implicites

Deux catégories de suites peuvent être définies, des suites explicites, et des suites implicites, ces dernières étant le plus souvent caractérisées par une relation de récurrence.

1) Suites explicites

Ce sont des suites pour lesquelles le calcul de l'image d'un entier naturel n se fait à partir d'un algorithme n'utilisant que la valeur de n en entrée. On désigne ce genre de suite par une écriture de la forme : $U_n = f(n)$, f désignant l'algorithme de calcul.

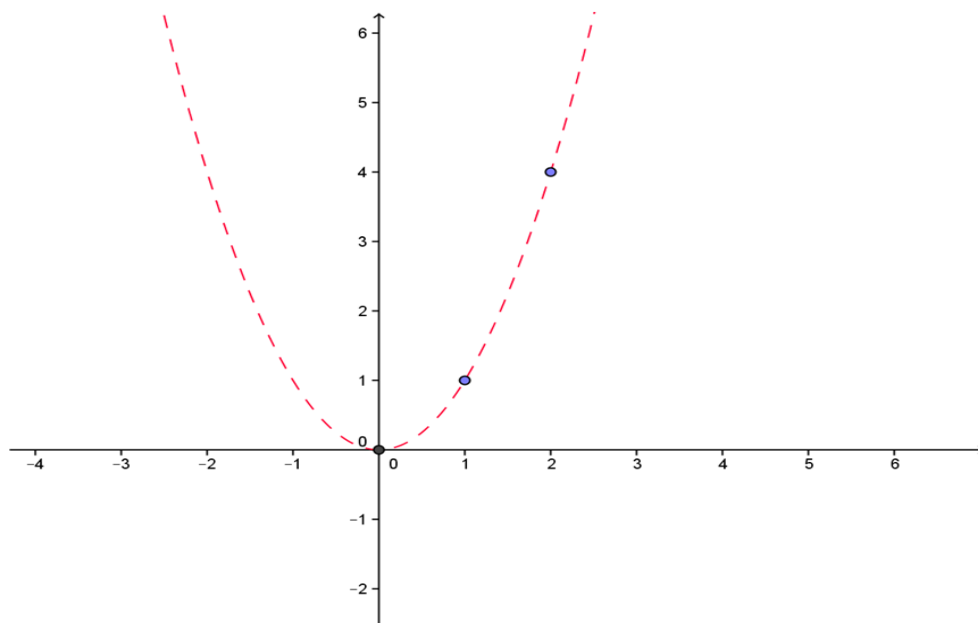
Exemples :

f étant une fonction de la variable réelle x :

a) $f(x) = x^2$ définit la suite explicite : $U_n = f(n) = n^2$ de tableau de valeurs :

Rang n	0	1	2	3	4	...	n	$n + 1$...
Terme U_n	0	1	4	9	16	...	n^2	$(n + 1)^2$...

Son graphique est formé de points situés sur la courbe d'équation $y = x^2$



b) $f(x) = \frac{1}{x}$ définit la suite explicite : $U_n = f(n) = \frac{1}{n}$ de tableau de valeurs :

Rang n	0	1	2	3	4	...	n	$n + 1$...
Terme U_n	—	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$...	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n+1}$...

A noter que cette suite n'est définie qu'à partir du rang 1

c) f n'est pas forcément associée à une fonction de la variable réelle x comme dans l'exemple :

$$U_n = f(n) = (-1)^n$$

Rang n	0	1	2	3	4	...	n	$n + 1$...
Terme U_n	1	-1	1	-1	1	...	$(-1)^n$	$(-1)^{n+1}$...

2) Suites implicites

Ce sont les suites qui ne sont pas explicites et qui sont la plupart du temps définies par une relation de récurrence.

a) Suites définies par une relation de récurrence d'ordre 1 :

Ce sont des suites pour lesquelles un terme est l'image par une fonction f du terme précédent. Le calcul de la valeur de chaque terme ne peut donc s'effectuer que de proche en proche à partir du premier terme. Ces suites sont définies par la forme :

$$\begin{cases} U_{n+1} = f(U_n) \\ U_0 = a \end{cases}$$

Prenons l'exemple où $f(x) = 2x - 3$ et $a = 1$

$$U_0 = 1$$

$$U_1 = f(U_0) = f(1) = -1$$

$$U_2 = f(U_1) = f(-1) = -5$$

$$U_3 = f(U_2) = f(-5) = -13$$

Et ainsi de suite

Pour évaluer U_{1000} , il faudra donc a priori calculer 1000 images. On voit d'emblée qu'une suite implicite va poser plus de difficultés qu'une suite explicite. C'est pourquoi on cherchera à rendre explicite les suites implicites, dans la mesure du possible, ce qui pourra se faire pour certaines classes de suites comme les suites arithmétiques, les suites géométriques, les suites arithmético-géométriques et les suites homographiques, entre autres.

b) Suites définies par une relation de récurrence d'ordre p

Ce sont des suites pour lesquelles un terme est l'image par une fonction f des p termes précédents. Le calcul de la valeur de chaque terme ne peut donc s'effectuer que de proche en proche à partir du premier terme. Ces suites sont définies sous la forme :

$$\begin{cases} U_{n+p} = f(U_n, U_{n+1}, \dots, U_{n+p-1}) \\ U_0 = a_0, U_1 = a_1, \dots, U_{p-1} = a_{p-1} \end{cases}$$

Prenons l'exemple d'une suite récurrente d'ordre 2 où $f(x, y) = x + y$ et $a_0 = 1, a_1 = 1$

$$U_0 = 1$$

$$U_1 = 1$$

$$U_2 = f(U_0, U_1) = 1 + 1 = 2$$

$$U_3 = f(U_1, U_2) = 1 + 2 = 3$$

$$U_4 = f(U_2, U_3) = 2 + 3 = 5$$

Et ainsi de suite.

Nous retrouvons notre suite de Fibonacci déjà citée.

IV Variations d'une suite

Une suite est dite croissante si :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq U_{n+1}$$

strictement croissante si :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n < U_{n+1}$$

décroissante si :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n \geq U_{n+1}$$

strictement décroissante si :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n > U_{n+1}$$

Pour une suite à termes strictement positifs, nous avons les caractérisations équivalentes :

$$U \text{ strictement croissante} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$$

$$U \text{ strictement décroissante} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$$

Preuves :

Cela découle immédiatement de :

$$U_{n+1} - U_n = U_n \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 \right)$$

Exemple

$$U_n = \frac{n^n}{n!}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n (n+1) n!}{n^n (n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n > 1$$

Donc U est strictement croissante.

Pour les suites explicites $U_n = f(n)$, il est clair que si f est une fonction monotone de la variable réelle x sur un intervalle de la forme $]a ; +\infty[$ alors la suite U a la même monotonie à partir du rang n_0 qui est le premier entier naturel de l'intervalle précédent.

Exemple :

Soit la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Et la suite explicite associée :

$$U_n = \frac{1}{n}$$

f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$ donc U est strictement décroissante à partir du rang 1

V Limite d'une suite

Dans toute la suite, ε et A sont des nombres réels.

Une suite U tend vers un nombre réel limite L si :

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < U_n < L + \varepsilon$

On écrit :

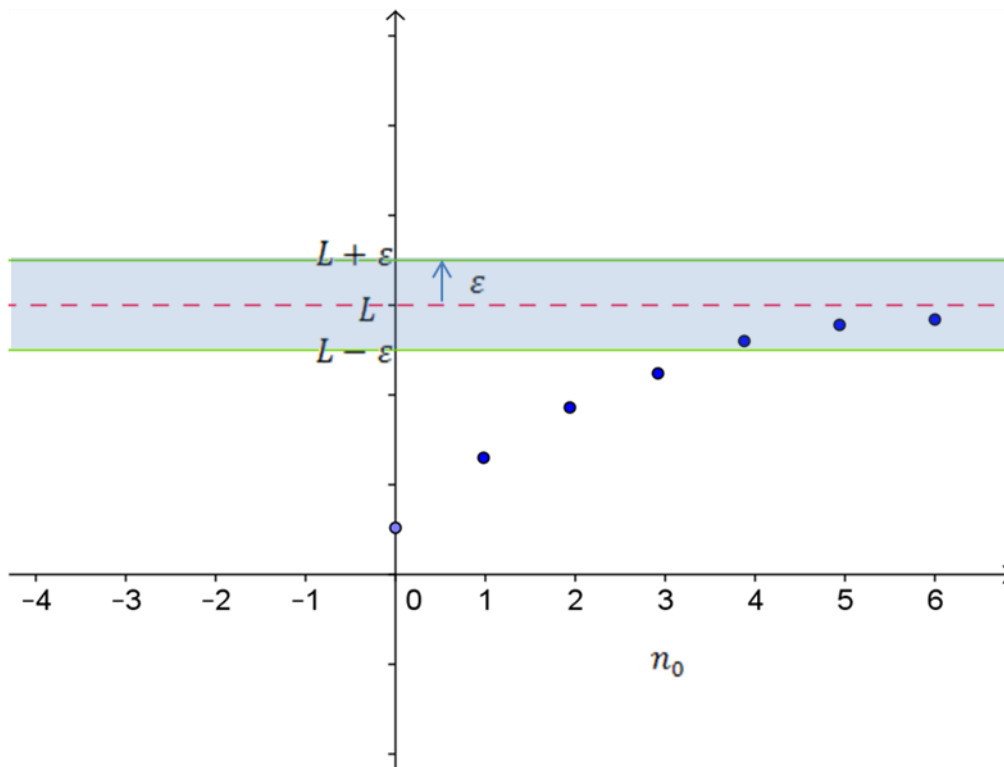
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L$$

A noter que :

$$L - \varepsilon < U_n < L + \varepsilon \Leftrightarrow |U_n - L| < \varepsilon$$

Cette forme équivalente sera parfois préférable pour simplifier les démonstrations.

Graphiquement, cela se traduit par le fait que, pour tout $\varepsilon > 0$ tous les termes de la suite se trouvent dans une bande horizontale de demi-largeur ε après un certain rang n_0 qui dépend de ε



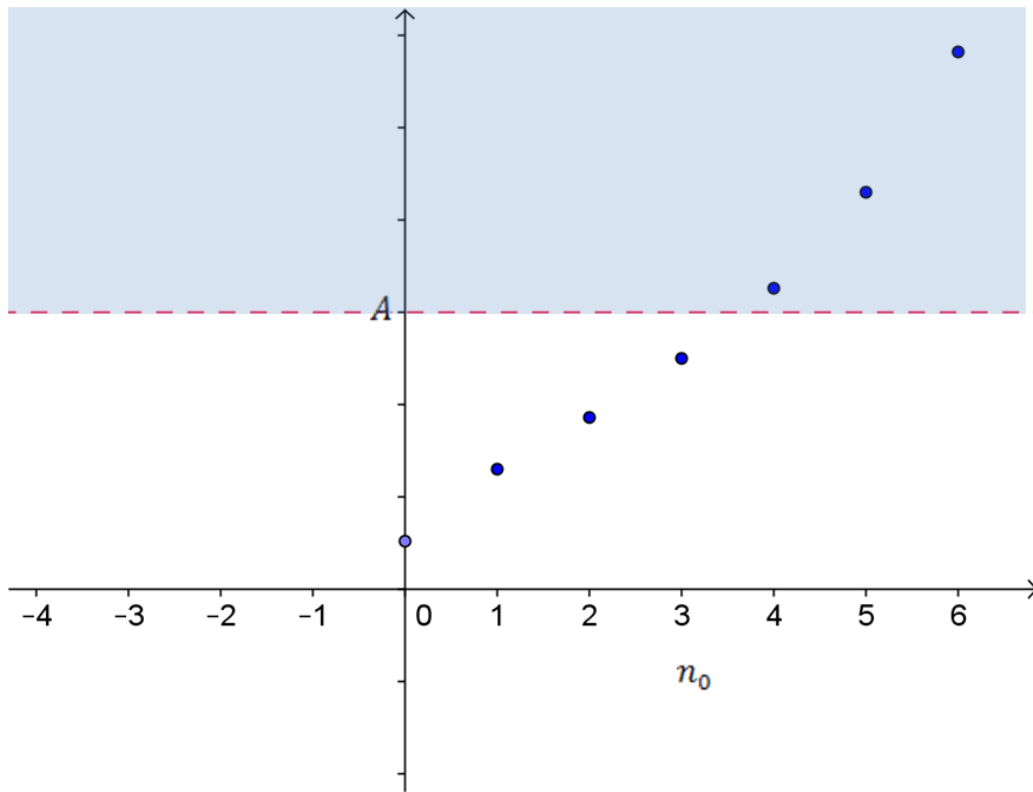
Une suite U tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow U_n > A$$

On écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

Graphiquement, cela se traduit par le fait que, pour tout $A > 0$ tous les termes de la suite se trouvent dans un demi plan supérieur s'appuyant sur la droite $y = A$ après un certain rang n_0 qui dépend de A



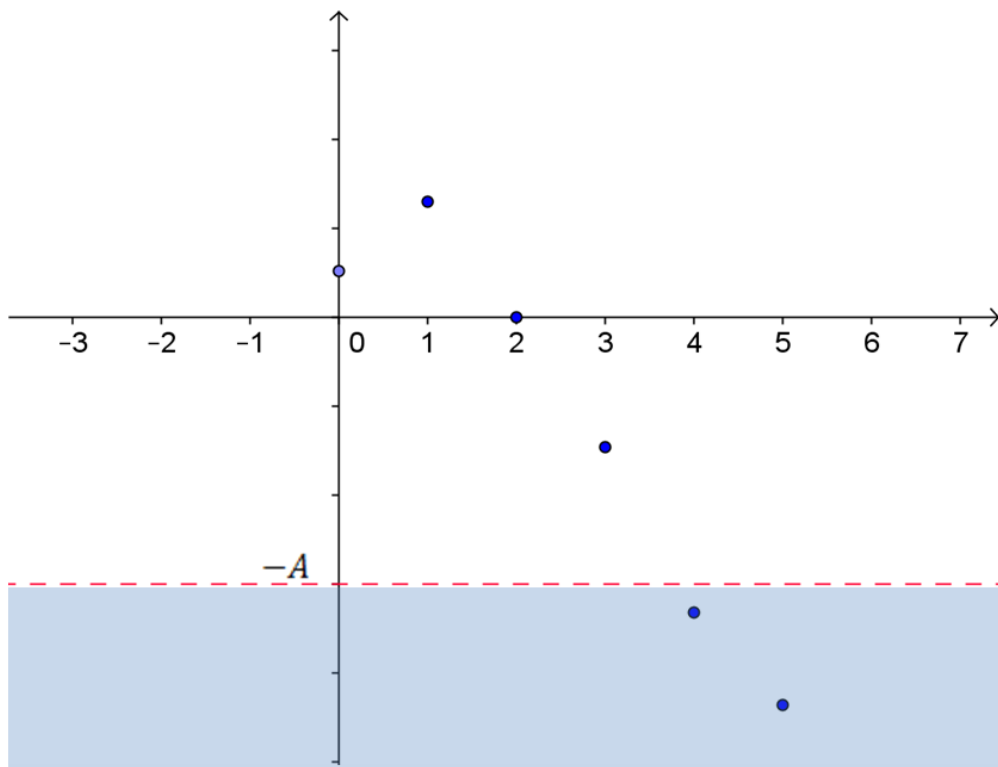
Une suite U tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow U_n < -A$$

On écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$$

Graphiquement, cela se traduit par le fait que, pour tout $A > 0$ tous les termes de la suite se trouvent dans un demi plan inférieur s'appuyant sur la droite $y = -A$ après un certain rang n_0 qui dépend de A



VI Propriété des limites

Dans toute la suite U et V désignent deux suites numériques :

1) Somme de limites finies

Si U et V ont pour limites respectivement L et L' alors la suite somme $W = U + V$ a pour limite $L + L'$

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$, traduisons la définition de la limite pour chaque suite avec le nombre $\frac{\varepsilon}{2}$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow L - \frac{\varepsilon}{2} < U_n < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow L' - \frac{\varepsilon}{2} < V_n < L' + \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit alors n_2 le plus grand de n_0 et n_1 qui ne sont pas nécessairement égaux. Alors :

$$n > n_2 \Rightarrow \begin{cases} L - \frac{\varepsilon}{2} < U_n < L + \frac{\varepsilon}{2} \\ L' - \frac{\varepsilon}{2} < V_n < L' + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Donc, en additionnant les encadrements :

$$n > n_2 \Rightarrow L + L' - \varepsilon < U_n + V_n < L + L' + \varepsilon$$

Ce qui prouve la propriété.

2) Somme de limites infinies de même signe

Si U et V ont pour limite toutes deux $+\infty$ (respectivement $-\infty$) alors la suite somme $W = U + V$ a pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$)

Preuve : avec $+\infty$

Soit $A > 0$, traduisons la définition de la limite pour chaque suite avec le nombre $\frac{A}{2}$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow U_n > \frac{A}{2}$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow V_n > \frac{A}{2}$$

Soit alors n_2 le plus grand de n_0 et n_1 qui ne sont pas nécessairement égaux. Alors :

$$n > n_2 \Rightarrow \begin{cases} U_n > \frac{A}{2} \\ V_n > \frac{A}{2} \end{cases}$$

Donc, en additionnant les encadrements :

$$n > n_2 \Rightarrow U_n + V_n > A$$

Ce qui prouve la propriété.

La démonstration est analogue avec $-\infty$

3) Somme d'une limite finie et d'une limite infinie

Si U a pour limite L et V pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) alors la suite somme $W = U + V$ a pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$)

Preuve : avec $+\infty$

Soit $A > 0$, traduisons la définition de la limite de U avec le nombre $\varepsilon = 1$ et de la limite de V avec le plus grand des nombres $A - L + 1$ et 1 :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow V_n > A - L + 1$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow L - 1 < U_n < L + 1$$

Soit alors n_2 le plus grand de n_0 et n_1 qui ne sont pas nécessairement égaux. Alors :

$$n > n_2 \Rightarrow \begin{cases} U_n > L - 1 \\ V_n > A - L + 1 \end{cases}$$

Donc, en additionnant les encadrements :

$$n > n_2 \Rightarrow U_n + V_n > A$$

Ce qui prouve la propriété.

La démonstration est analogue avec $-\infty$

4) Produit de deux limites finies

Si U a pour limite L et V pour limite L' alors la suite produit $W = U \times V$ a pour limite $L \times L'$

Preuve :

1er préliminaire :

Commençons par le cas où U est une suite constante égale à L .

Si $L = 0$ la propriété est triviale.

Si $L \neq 0$, soit un réel $\varepsilon > 0$ alors pour $\varepsilon/|L|$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |V_n - L'| < \frac{\varepsilon}{|L|}$$

$$\Rightarrow |L||V_n - L'| < \frac{\varepsilon}{|L|} \times |L|$$

$$\Rightarrow |L V_n - L L'| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |W_n - L L'| < \varepsilon$$

ce qui prouve la propriété

2ème préliminaire :

Poursuivons par le cas où U et V sont deux suites tendant vers 0.

soit un réel $\varepsilon > 0$ alors pour $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |U_n| < \sqrt{\varepsilon}$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow |V_n| < \sqrt{\varepsilon}$$

Soit alors n_2 le plus grand de n_0 et n_1 qui ne sont pas nécessairement égaux. Alors :

$$n > n_2 \Rightarrow \begin{cases} |U_n| < \sqrt{\varepsilon} \\ |V_n| < \sqrt{\varepsilon} \end{cases}$$

Donc par produit :

$$n > n_2 \Rightarrow |U_n| |V_n| < \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon}$$

Soit :

$$n > n_2 \Rightarrow |U_n \times V_n| < \varepsilon$$

ce qui prouve la propriété

cas général :

Il suffit de noter que :

$$U_n \times V_n = (U_n - L) \times (V_n - L') + L' U_n + L V_n - L \times L'$$

et d'appliquer la propriété sur la somme des limites.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \times V_n = 0 + L' \times L + L \times L' - L \times L' = L \times L'$$

5) Produit de deux limites infinies de même signe

Si U et V ont pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) alors la suite produit $W = U \times V$ a pour limite $+\infty$

Preuve (dans le cas $+\infty$) l'autre étant analogue

soit un réel $A > 0$ alors pour \sqrt{A} :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow U_n > \sqrt{A}$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow V_n > \sqrt{A}$$

Soit alors n_2 le plus grand de n_0 et n_1 qui ne sont pas nécessairement égaux. Alors :

$$n > n_2 \Rightarrow \begin{cases} U_n > \sqrt{A} \\ V_n > \sqrt{A} \end{cases}$$

Donc par produit :

$$n > n_2 \Rightarrow U_n V_n > \sqrt{A} \sqrt{A}$$

Soit :

$$n > n_2 \Rightarrow U_n \times V_n > A$$

ce qui prouve la propriété

6) Produit d'une limite finie par une limite infinie

Si U a pour limite $L > 0$ et V pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors la suite produit $W = U \times V$ a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Et des propriétés analogues quand $L < 0$ et en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$ avec application de la règle des signes.

Preuve (premier cas uniquement)

Pour $\varepsilon = L/2 > 0$:

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow L - \frac{L}{2} < U_n < L + \frac{L}{2} \\ \Rightarrow \frac{L}{2} < U_n \end{aligned}$$

Soit $A > 0$ pour $2A/L > 0$:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow \frac{2A}{L} < V_n$$

Soit alors n_2 le plus grand de n_0 et n_1 qui ne sont pas nécessairement égaux. Alors :

$$n > n_2 \Rightarrow \begin{cases} U_n > \frac{L}{2} \\ V_n > \frac{2A}{L} \end{cases}$$

Donc par produit :

$$n > n_2 \Rightarrow U_n V_n > \frac{L}{2} \times \frac{2A}{L}$$

Soit :

$$n > n_2 \Rightarrow U_n \times V_n > A$$

ce qui prouve la propriété.

7) Inverse d'une limite finie

Si U a pour limite $L \neq 0$ alors la suite inverse $W = 1/U$ a pour limite $1/L$

Preuve (dans le cas $L > 0$)

Pour $\varepsilon = L/2 > 0$:

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow L - \frac{L}{2} < U_n < L + \frac{L}{2} \\ \Rightarrow \frac{L}{2} < U_n \end{aligned}$$

Soit alors un réel $\varepsilon > 0$ alors pour $\frac{\varepsilon L^2}{2}$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow |U_n - L| < \frac{\varepsilon L^2}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{U_n} - \frac{1}{L} \right| = \left| \frac{L - U_n}{U_n L} \right| = \frac{|U_n - L|}{U_n L} < \frac{\frac{\varepsilon L^2}{2}}{\frac{L}{2} \times L}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{U_n} - \frac{1}{L} \right| < \varepsilon$$

ce qui prouve la propriété

8) Inverse d'une limite infinie

Si U a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ alors la suite inverse $V = 1/U$ a pour limite 0

Preuve (cas $+\infty$ uniquement, l'autre s'en déduisant)

Soit un réel $\varepsilon > 0$ alors pour $A = 1/\varepsilon$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow U_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{U_n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < V_n < \varepsilon$$

ce qui prouve la propriété

9) Inverse d'une limite nulle par valeur supérieure ou inférieure

Si U a pour limite 0^+ (resp. 0^-) alors la suite inverse $V = 1/U$ a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Preuve (cas 0^+ , l'autre est analogue)

Soit un réel $A > 0$ pour $\varepsilon = 1/A$:

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow 0 < U_n < 1/A \\ \Rightarrow U_n > A \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété

10) Quotient de limites

Si U a pour limite L et V pour limite $L' \neq 0$ alors la suite quotient $W = U/V$ a pour limite L/L'

Preuve :

Il suffit de noter que

$$W = U \times \frac{1}{V}$$

et d'appliquer la propriété de l'inverse et du produit.

VII Théorème des gendarmes

1^{ère} forme : à deux gendarmes

Si U et V sont deux suites numériques ayant pour même limite L et si W est une suite encadrée par ces deux dernières (de ce fait appelées gendarmes), c'est-à-dire vérifiant, au moins à partir d'un certain rang :

$$U_n \leq W_n \leq V_n$$

alors W converge vers la même limite L

Preuve :

Soit un réel $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < U_n < L + \varepsilon$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow L - \varepsilon < V_n < L + \varepsilon$$

Soit alors n_2 le plus grand de n_0 et n_1 qui ne sont pas nécessairement égaux. Alors :

$$n > n_2 \Rightarrow L - \varepsilon < U_n \leq W_n \leq V_n < L + \varepsilon$$

Ce qui prouve la propriété.

2ème forme : à un gendarme

Si U est une suite numérique tendant vers $+\infty$ et si W est une suite minorée par cette dernière (de ce fait appelée gendarme), c'est-à-dire vérifiant, au moins à partir d'un certain rang :

$$U_n \leq W_n$$

alors W tend également vers $+\infty$

Preuve :

Soit un réel $A > 0$ alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow A < U_n \leq W_n$$

Ceci prouve la propriété.

3ème forme : à un gendarme

Si U est une suite numérique tendant vers $-\infty$ et si W est une suite majorée par cette dernière (de ce fait appelée gendarme), c'est-à-dire vérifiant, au moins à partir d'un certain rang :

$$W_n \leq U_n$$

alors W tend également vers $-\infty$

Preuve :

Il suffit de noter que la suite $(-W)$ est alors minorée par la suite $(-U)$ qui tend vers $+\infty$ et tend donc également vers $+\infty$. W tend donc vers $-\infty$

VIII Passage à la limite dans les inégalités

Si U est une suite numérique tendant vers une limite finie L et si au moins à partir d'un certain rang : $U_n \leq a$ (respectivement $\geq a$) alors :

$$L \leq a \text{ (respectivement } \geq a)$$

Preuve (cas $(\leq a)$) :

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, pour $\varepsilon = 1/m : \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow L - \frac{1}{m} < U_n < L + \frac{1}{m}$

Donc :

$$L - \frac{1}{m} \leq a$$

Soit :

$$\forall m \in \mathbb{N}^* : L - a \leq \frac{1}{m}$$

Etablissons alors le résultat suivant pour un réel x quelconque :

$$\forall m \in \mathbb{N}^* : x \leq \frac{1}{m} \Rightarrow x \leq 0$$

Par l'absurde, supposons $x > 0$ alors, en prenant pour m_0 l'entier naturel immédiatement strictement supérieur à $\frac{2}{x}$ on a :

$$\frac{1}{m_0} < \frac{x}{2} < x$$

Ce qui est absurde

Nous en déduisons : $L - a \leq 0$ d'où : $L \leq a$

IX Unicité de la limite

Si U est une suite numérique tendant vers une limite finie L et une limite finie L' alors $L = L'$

Preuve:

Par l'absurde, supposons, par exemple $L < L'$

Pour :

$$\varepsilon = \frac{L' - L}{2} > 0$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < U_n < L + \varepsilon$$

$$\Rightarrow U_n < L + \frac{L' - L}{2}$$

$$\Rightarrow U_n < \frac{L + L'}{2}$$

Par passage à la limite dans l'inégalité :

$$L' \leq \frac{L + L'}{2}$$

Soit :

$$2L' \leq L + L'$$

D'où

$$L' \leq L$$

Ce qui est contradictoire

X Caractérisation de Cauchy

Une suite numérique est dite de Cauchy si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall (n, k) \in \mathbb{N}^2 : n > n_0 \Rightarrow |U_{n+k} - U_n| < \varepsilon$$

Il est aisé de construire une suite de rationnels qui soit de Cauchy mais qui n'admette pas de limite rationnelle, c'est d'ailleurs l'inconvénient de \mathbb{Q} jugé incomplet à cet égard. Prenons en effet la suite de termes successifs :

0 ; 0,1 ; 0,12 ; 0,123 ; 0,1234 ; ...

suite obtenue en mettant les nombres entiers successifs bouts à bouts et pouvant être formulée ainsi :

$$U_{n+1} = U_n + \frac{n}{10^{l(n)}}$$

Où $l(n)$ est le nombre de décimales de U_n ajouté au nombre de chiffres de n

On peut alors vérifier que l'on a : $l(n) \geq n$ et que :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2 : |U_{n+k} - U_n| \leq \frac{1}{10^{l(n)}} \leq \frac{1}{10^n}$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^n} = 0$$

Soit donc un réel $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

Donc :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2 : n > n_0 \Rightarrow |U_{n+k} - U_n| \leq \frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

Ceci prouve que U est bien une suite de Cauchy. Pourtant, telle qu'elle est construite, U ne peut tendre vers une limite rationnelle, mais une limite irrationnelle que l'on peut se représenter comme le nombre formé d'un zéro et de décimales qui sont la mise bout à bout de tous les entiers naturels consécutifs à partir de 1.

Une propriété essentielle de l'ensemble des nombres réels est :

Toute suite de nombres réels de Cauchy est convergente, c'est-à-dire, tend vers une limite finie.

Réciproquement :

Toute suite de nombres réels qui est convergente est de Cauchy.

Preuves

La première propriété, qui renvoie à la construction (assez complexe) de l'ensemble des nombres réels comme classes d'équivalence de suites de Cauchy de rationnels et que nous ne développerons pas ici, est l'essence même de l'introduction des irrationnels que l'on peut voir, pour simplifier, comme des nombres avec une infinité de décimales sans répétition périodique, avec cependant de possibles représentations doubles. Ainsi :

$$1,0000 \dots = 0,99999 \dots$$

$$3,4600 \dots = 3,4599 \dots$$

Quant à la réciproque, nous allons la prouver rigoureusement en rappelant une propriété sur les intervalles.

$$\forall (x, y) \in]a ; b[: |x - y| < b - a$$

Soit donc une suite U convergeant vers un nombre réel L et soit un réel $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow L - \frac{\varepsilon}{2} < U_n < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

Or :

$$n > n_0 \Rightarrow n + k > n_0 \Rightarrow L - \frac{\varepsilon}{2} < U_{n+k} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc U_n et U_{n+k} sont tous deux dans l'intervalle $]L - \frac{\varepsilon}{2} ; L + \frac{\varepsilon}{2}[$ et donc :

$$n > n_0 \Rightarrow |U_{n+k} - U_n| < \varepsilon$$

U est donc bien une suite de Cauchy.

Exemple d'usage :

Soit une suite définie par la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)!}$$

Il est aisé d'établir pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$U_{n+k} = U_n + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+k)!}$$

Soit en factorisant :

$$U_{n+k} = U_n + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(n+k)} \right)$$

D'où en minorant les dénominateurs

$$|U_{n+k} - U_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^{k-1}} \right)$$

En minorant le dénominateur factoriel :

$$|U_{n+k} - U_n| \leq \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^{k-1}} \right)$$

Soit pour $n \geq 2$:

$$|U_{n+k} - U_n| \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1 - \frac{1}{n^k}}{1 - \frac{1}{n}} \right)$$

$$|U_{n+k} - U_n| \leq \frac{1}{n-1}$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$$

Il est alors aisé d'en déduire que U est de Cauchy. Cela prouve qu'elle est convergente sans pour autant donner la valeur de la limite.

XI convergence des suites monotones

Si U est une suite numérique croissante, alors, si U est majorée, U admet une limite finie en $+\infty$ sinon elle tend vers $+\infty$.

Soit, pour la première condition, en termes mathématiques :

$$(\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq M) \Rightarrow \exists L \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L$$

Un énoncé analogue est le suivant :

Si U est une suite numérique décroissante, alors, si U est minorée, U admet une limite finie en $+\infty$ sinon elle tend vers $-\infty$.

Preuve (cas d'une suite croissante majorée)

Nous allons montrer par l'absurde que la suite est de Cauchy.

Supposons donc que U ne vérifie pas le critère de Cauchy. Ecrivons alors la négation de ce critère :

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \exists (m, k) \in \mathbb{N}^2 : m > n \text{ et } |U_{m+k} - U_m| \geq \varepsilon_0$$

Donc, compte tenu du caractère croissant de la suite :

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \exists (m, k) \in \mathbb{N}^2 : m > n \text{ et } U_{m+k} \geq U_m + \varepsilon_0 \geq U_n + \varepsilon_0$$

Définissons alors une fonction $g(p)$ strictement croissante sur \mathbb{N}

$g(0)$ est l'entier $m + k$ associé à l'entier n de la formulation précédente à partir duquel la suite est définie

$g(1)$ est l'entier $m + k$ associé à $n = g(0)$

et ainsi de suite, $g(p + 1)$ étant l'entier $m + k$ associé à $n = g(p)$

On a alors par construction :

$$U_{g(1)} \geq U_{g(0)} + \varepsilon_0$$

$$U_{g(2)} \geq U_{g(1)} + \varepsilon_0$$

Soit de façon générale :

$$\forall p \in \mathbb{N} : U_{g(p+1)} \geq U_{g(p)} + \varepsilon_0$$

Une récurrence simple montre que l'on a alors :

$$\forall p \in \mathbb{N} : U_{g(p)} \geq U_{g(0)} + p \varepsilon_0$$

Or

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} U_{g(0)} + p \varepsilon_0 = +\infty$$

Donc, par théorème du gendarme minorant :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} U_{g(p)} = +\infty$$

Cela contredit le caractère borné de la suite

La suite vérifie donc le critère de Cauchy, elle est donc convergente.

XII Suites adjacentes

Si U, V sont deux suites numériques alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq V_n \\ U \text{ croissante}, V \text{ décroissante}, \Rightarrow \exists L \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = L \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n - U_n = 0 \end{array} \right.$$

Preuves :

Avec les hypothèses on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq V_n \leq V_0, \quad U_0 \leq U_n \leq V_n$$

Donc U est croissante et majorée et V est décroissante et minorée. Les deux suites sont donc convergentes respectivement vers des limites L et L'

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n - U_n = 0$$

Donc :

$$L' - L = 0$$

D'où :

$$L' = L$$

XIII Critères de convergence pour les suites à termes strictements positifs

Dans toute la suite, U est une suite numérique à termes strictements positifs

1) **Preliminaire** :

Soit une suite de la forme :

$$U_n = q^n$$

où q est un réel strictement positif alors :

si $q > 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

si $0 < q < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

Preuves :

si $q > 1$ posons : $q = 1 + r$ avec $r > 0$

alors en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$q^n = (1 + r)^n \geq 1 + n r$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + n r = +\infty$$

Il en résulte par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

si $0 < q < 1$ posons :

$$a = \frac{1}{q}$$

Alors $a > 1$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$$

Or :

$$q^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

2) Règle de d'Alembert

Si U vérifie le critère de d'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = L$$

Alors :

Si $L < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

Si $L > 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

Si $L = 1$ on ne peut pas conclure

Preuves :

1^{er} cas : $L < 1$:

Pour $\varepsilon = (1 - L)/2$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < \frac{U_{n+1}}{U_n} < L + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} < L + \frac{1 - L}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} < \frac{L+1}{2}$$

Posons :

$$q = \frac{L+1}{2}$$

On en déduit :

$$n > n_0 \Rightarrow U_{n+1} < q U_n$$

donc :

$$U_{n_0+1} < q U_{n_0}$$

$$U_{n_0+2} < q U_{n_0+1} < q^2 U_{n_0}$$

$$U_{n_0+3} < q U_{n_0+2} < q^3 U_{n_0}$$

...

$$U_{n_0+k} < q U_{n_0+k-1} < q^k U_{n_0}$$

Soit en posant $n_0 + k = n$:

$$n > n_0 \Rightarrow U_n < q^{n-n_0} U_{n_0}$$

D'où :

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < U_n < q^n \frac{U_{n_0}}{q^{n_0}}$$

Or q étant le centre de l'intervalle $[L; 1]$ on a : $0 < q < 1$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n \frac{U_{n_0}}{q^{n_0}} = 0$$

Et par théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

Ce qui prouve la propriété.

2ème cas : $L > 1$:

Introduisons la suite :

$$V_n = \frac{1}{U_n}$$

V est une suite à termes strictement positifs qui vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_{n+1}}{V_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{U_{n+1}}}{\frac{1}{U_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{U_{n+1}} = \frac{1}{L} < 1$$

On en déduit d'après la propriété précédente que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0^+$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{V_n} = +\infty$$

Ce qui prouve la propriété

3ème cas : $L = 1$:

Prenons deux exemples aux conclusions différentes pour montrer qu'il n'y a pas de règle.

Exemple 1 :

$$\begin{aligned} U_n &= n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n &= +\infty \end{aligned}$$

Exemple 2 :

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{n+1} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_{n+1}}{V_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n &= 0 \end{aligned}$$

Exemple d'utilisation de la règle de d'Alembert :

Soit la suite définie par

$$U_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1) \times n! \times n^n}{(n+1) \times (n+1)^n \times n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) = -n \operatorname{Ln}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{\operatorname{Ln}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

On rappelle, par la dérivée de la fonction $\operatorname{Ln}(x)$ en 0 que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Ln}(1+h)}{h} = 1$$

On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Ln}\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) = -1$$

et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = e^{-1} < 1$$

D'après la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

Remarque : Une simple minoration permet d'obtenir le résultat car :

$$U_n = \frac{n(n-1) \dots 2 \times 1}{n \times n \times \dots \times n \times n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \dots \times \frac{n}{n}$$

Donc :

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{n}$$

Le théorème des gendarmes montre que U tend vers 0

3) Règle de Cauchy

Si U vérifie le critère de Cauchy :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n)^{\frac{1}{n}} = L$$

Alors :

Si $L < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

Si $L > 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

Si $L = 1$ on ne peut pas conclure

Preuves :

1^{er} cas : $L < 1$

Comme pour la démonstration précédente :

$$\begin{aligned} \exists q \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow (U_n)^{\frac{1}{n}} < q < 1 \\ \Rightarrow 0 < U_n < q^n \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

2^{ème} cas : $L > 1$

Comme pour la démonstration précédente on introduit la suite :

$$V_n = \frac{1}{U_n}$$

V est une suite à termes strictement positifs qui vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{U_n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(U_n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{L} < 1$$

On en déduit d'après la propriété précédente que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0^+$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{V_n} = +\infty$$

Ce qui prouve la propriété.

3^{ème} cas :

Prenons deux exemples aux conclusions différentes pour montrer qu'il n'y a pas de règle.

Exemple 1 :

$$U_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \operatorname{Ln}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e$$

Exemple 2 :

$$V_n = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \operatorname{Ln}\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Exemple d'utilisation de la règle de de Cauchy :

Soit la suite définie par

$$U_n = \frac{a^n}{n^n}$$

où $a > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^n}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} = 0 < 1$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

XIV Suites extraites

1) Définition

Etant données deux suites numériques U et V , on dit que V est une suite extraite de U si il existe une injection strictement croissante g de \mathbb{N} dans \mathbb{N} telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n = U_{g(n)}$$

2) Exemples :

La suite formée par les termes de rang pair de U est une suite extraite V définie par

$$V_n = U_{2n}$$

La suite formée par les termes de rang impair de U est une suite extraite W définie par

$$W_n = U_{2n+1}$$

3) Suite translatée

Etant donnée deux suites numériques U et V , on dit que V est une suite translatée de U si il existe un entier relatif k tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n = U_{n-k}$$

En terme de graphique dans une repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , cela se traduit par la propriété suivante :

Le graphe de V se déduit du graphe de U par une translation de vecteur $k \vec{i}$. C'est l'analogie de ce que nous avons présenté dans le fichier intitulé « transformations de courbes »

Si $k \leq 0$ la fonction $g(n) = n - k$ est une injection strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , mais ce n'est pas le cas lorsque $k > 0$ car V n'est alors définie qu'à partir du rang k

Une propriété des suites translatées d'une suite U est qu'elles ont même limite que cette dernière (finie ou infinie)

Preuve : (cas d'une limite finie seulement, les autres étant analogues)

Soit U une suite numérique de limite L et V une suite translatée définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n = U_{n-k}$$

Soit un réel $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < U_n < L + \varepsilon$$

Donc en posant : $n_1 = n_0 + k$

$$n > n_1 \Rightarrow n - k > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < U_{n-k} < L + \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < V_n < L + \varepsilon$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = L$$

4) Limite d'une suite extraite :

Si une suite numérique U a pour limite un nombre réel L ou $+\infty$ ou $-\infty$ alors toute suite extraite de U admet la même limite

Preuve : (cas d'une limite finie seulement, les autres étant analogues)

Soit U une suite numérique de limite L et V une suite extraite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n = U_{g(n)}, \quad g \text{ strictement croissante et injective}$$

Nous avons :

$$g(0) \geq 0$$

$$g(1) > g(0)$$

Donc :

$$g(1) \geq 1$$

Par une récurrence évidente :

$$\forall n \in \mathbb{N} : g(n) \geq n$$

Soit un réel $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < U_n < L + \varepsilon$$

Donc :

$$n > n_0 \Rightarrow g(n) \geq n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < U_{g(n)} < L + \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < V_n < L + \varepsilon$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = L$$

Remarque :

Considérons une suite V de la forme :

$$V_n = U_{2n-3}$$

Cette suite n'est clairement définie qu'à partir du rang 2 et la fonction :

$$g(n) = 2n - 3$$

n'est pas une injection de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

On peut cependant se ramener facilement à la situation précédente en introduisant la suite W définie par :

$$W_n = V_{n+2} = U_{2n+1}$$

W est une suite extraite de U et V une suite translatée de W . On en déduit que V a même limite que U

XV Majorants-minorants- borne supérieure (inférieure)

1) Définitions

Soit \mathbb{E} une partie de \mathbb{R} , et $(M, m, S, I) \in \mathbb{R}^2$

On dit que M est un majorant de \mathbb{E} si : $\forall x \in \mathbb{E} : x \leq M$

On dit que m est un minorant de \mathbb{E} si : $\forall x \in \mathbb{E} : m \leq x$

On notera $Maj(\mathbb{E})$ l'ensemble des majorants de \mathbb{E} et $Min(\mathbb{E})$ l'ensemble de ses minorants

On dit que S est borne supérieure de \mathbb{E} si $S \in Maj(\mathbb{E})$ et $\forall x \in Maj(\mathbb{E}) : S \leq x$

La borne supérieure est donc le plus petit des majorants

On dit que I est borne inférieure de \mathbb{E} si $I \in Min(\mathbb{E})$ et $\forall x \in Min(\mathbb{E}) : x \leq I$

La borne inférieure est donc le plus grand des minorants

2) Exemples

3 est un majorant de $[0; 2[$ mais pas le plus petit

2 est la borne supérieure de $[0; 2[$

-1 est un minorant de $[0; 2[$ mais pas le plus grand

0 est la borne inférieure de $[0; 2[$

3) Théorème de la borne supérieure (inférieure)

Tout sous-ensemble de \mathbb{R} non vide et majoré (c'est-à-dire possédant au moins un majorant) possède une borne supérieure et elle est unique.

Tout sous-ensemble de \mathbb{R} non vide et minoré (c'est-à-dire possédant au moins un minorant) possède une borne inférieure et elle est unique.

Preuves :

Commençons par la première :

Soit \mathbb{E} une partie de \mathbb{R} non vide et majorée. Nous allons construire deux suites adjacentes U et V en procédant ainsi :

\mathbb{E} étant non vide possède un élément a

\mathbb{E} étant majoré possède un majorant b

Posons :

$$U_0 = a$$

$$V_0 = b$$

Posons :

$$c_0 = \frac{a + b}{2}$$

Si $c_0 \in \text{Maj}(\mathbb{E})$ on pose :

$$U_1 = a$$

$$V_1 = c_0$$

sinon on pose :

$$U_1 = c_0$$

$$V_1 = b$$

En supposant par récurrence U_n et V_n construits, on pose :

$$c_n = \frac{U_n + V_n}{2}$$

Si $c_n \in \text{Maj}(\mathbb{E})$ on pose :

$$U_{n+1} = U_n$$

$$V_{n+1} = c_n$$

sinon on pose :

$$U_{n+1} = c_n$$

$$V_{n+1} = V_n$$

Nous avons ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{V_n - U_n}{2}$$

Soit par récurrence évidente :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n - U_n = \frac{b - a}{2^n}$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n - U_n = 0$$

Or U est croissante et V décroissante.

U et V sont donc deux suites adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite L

Montrons alors que L est la borne supérieure de \mathbb{E} . Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{E} : x \leq V_n$$

Par passage à la limite :

$$\forall x \in \mathbb{E} : x \leq L$$

Donc L est un majorant de \mathbb{E} .

Notons alors que pour tout entier naturel n , U_n n'est pas un majorant de \mathbb{E} donc il existe un élément x_n de \mathbb{E} qui lui est strictement supérieur soit

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq x_n \leq V_n$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$$

Soit alors x un majorant de \mathbb{E} , alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x$$

Par passage à la limite :

$$L \leq x$$

L est donc borne supérieure de \mathbb{E}

Montrons alors l'unicité de la borne supérieure quand elle existe.

Soient donc L et L' deux bornes supérieures de \mathbb{E} , alors L étant le plus petit des majorants et L' un majorant on a :

$$L \leq L'$$

Et on peut inverser les rôles :

$$L' \leq L$$

D'où l'égalité

Pour la deuxième propriété, il suffit d'appliquer la première à l'ensemble $-\mathbb{E}$ formé des opposés des éléments de \mathbb{E} et constater que sa borne supérieure est la borne inférieure de \mathbb{E}

4) Théorème de Bolzano-Weierstrass - Suites bornées

De toute suite de réels bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Preuve :

Nous allons commencer par un préliminaire :

De toute suite de réels, on peut extraire une sous-suite monotone

Preuve du préliminaire :

Soit une suite numérique U

On considère le sous-ensemble de rangs suivant :

$$\mathbb{F} = \{p \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : m > p \Rightarrow U_m \geq U_p\}$$

Et on raisonne par disjonction de cas :

1^{er} cas : \mathbb{F} a un nombre fini d'éléments

Soit p_0 le plus grand élément de \mathbb{F} posons :

$$g(0) = p_0 + 1$$

Alors $g(0) \notin \mathbb{F}$ donc :

$$\exists p_1 \in \mathbb{N} : p_1 \geq g(0) \text{ et } U_{p_1} < U_{g(0)}$$

On pose alors :

$$g(1) = p_1$$

Supposons alors construits par récurrence une suite d'entiers naturels $g(k)$ n'appartenant pas à \mathbb{F} et tels que :

$$g(0) < g(1) < \dots < g(n)$$

Alors $g(n) \notin \mathbb{F}$ donc :

$$\exists p_{n+1} \in \mathbb{N} : p_{n+1} \geq g(n) \text{ et } U_{p_{n+1}} < U_{g(n)}$$

On pose alors :

$$g(n+1) = p_{n+1}$$

Et on a ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{g(n+1)} < U_{g(n)}$$

La suite $V_n = U_{g(n)}$ est alors une suite extraite de U et elle est décroissante

2^{ème} cas : \mathbb{F} a un nombre infini d'éléments

Soit alors p_0 le plus petit élément de \mathbb{F} .

Posons :

$$g(0) = p_0$$

$\mathbb{F} \setminus \{g(0)\}$ n'est pas vide donc a un plus petit élément noté p_1 . Posons :

$$g(1) = p_1$$

Supposons alors construits par récurrence une suite d'entiers naturels $g(k)$ tels que :

$$\forall k \in \llbracket 2; n \rrbracket \quad g(k) = \text{Min } \mathbb{F} \setminus \{g(0); g(1); \dots; g(k-1)\}$$

Alors $\mathbb{F} \setminus \{g(0); g(1); \dots; g(n)\}$ n'est pas vide donc a un plus petit élément noté p_{n+1} .

Posons :

$$g(n+1) = p_{n+1}$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N} : g(n) < g(n+1)$$

La suite $V_n = U_{g(n)}$ est alors une suite extraite de U et elle est croissante

Preuve du théorème de Bolzano Weierstrass :

Soit une suite numérique bornée U , d'après le préliminaire, on peut extraire une sous-suite V monotone.

Or toute suite monotone bornée est soit croissante et majorée, soit décroissante et minorée, donc elle converge.