Constante d'Euler et équivalent de Stirling

L'objectif de ce fichier est de déterminer un équivalent de la suite n ! mais au préalable, il nous faut établir un résultat faisant apparaître la constante d'Euler.

I Constante d'Euler

Considérons la série S définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Et comparons à l'intégrale :

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = Ln(n)$$

Un résultat général présenté dans le fichier sur les séries numériques nous indique qu'il existe un réel C tel que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx\right) = C$$

C est appelée constante d'Euler et s'interprète géométriquement (voir partie hachurée sur la figure ci-dessous) comme l'aire située entre la courbe de la fonction en escalier définie par :

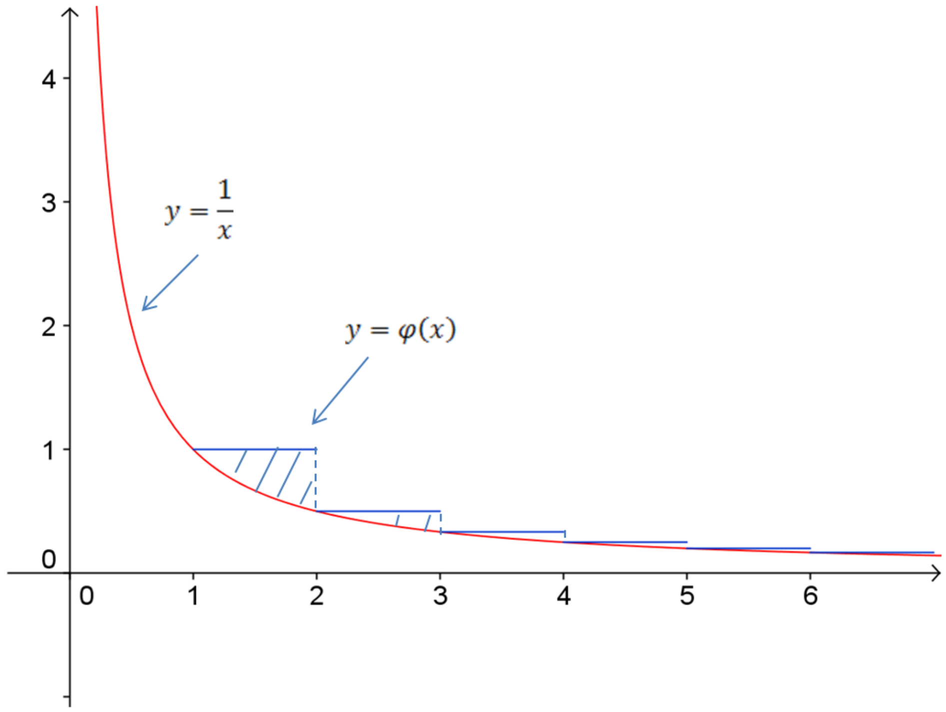
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^* : \forall\, x \in [k; k+1[\ : \varphi(x) = \frac{1}{k}$$

et la courbe de la fonction inverse car :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,dx - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{n} + \int_1^n \left(\varphi(x) - \frac{1}{x}\right)dx$$

donc, par passage à la limite :

$$\boxed{\boldsymbol{C = \int_{1}^{+\infty} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x}\right) dx}}$$



Nous pouvons cependant retrouver ce résultat d'une autre façon en considérant la suite :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - Ln(n)$$

et en la faisant apparaitre sous forme de série comme suit :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} (Ln(k) - Ln(k-1)) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} + Ln\left(\frac{k-1}{k}\right)\right)$$
$$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} + Ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$$

Or :

$$\frac{1}{k} + Ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2\,k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{1}{2\,k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \sim -\frac{1}{2\,k^2}$$

La série est donc convergente. Il en va donc de même de U_n qui tend vers une limite C

II Equivalent de Stirling

Etape 1 :

n ! étant un produit de nombres entiers strictement positifs, il est naturel de considérer son logarithme népérien, qui transforme la suite en série :

$$Ln(n\,!) = \sum_{k=2}^{n} Ln(k)$$

Etape 2 :

On note que n ! est un un produit de n entiers :

$$n\,! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Cela suggère de le rapprocher d'une suite plus pratique à manipuler :

$$n^n = n \times n \times \ldots \times n \times n$$

Etape 3 :

Appliquons à n^n le même traitement en en prenant le logarithme népérien et en faisant apparaitre une série télescopique :

$$Ln(n^n) = \sum_{k=2}^{n} \left(Ln(k^k) - Ln((k-1)^{k-1}) \right)$$

et intéressons nous au terme général de la série précédente :

$$Ln(k^k) - Ln((k-1)^{k-1})$$

$$= k\,Ln(k) - (k-1)Ln(k-1)$$

$$= k\,Ln(k) - (k-1)Ln\left(k\,\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$$

$$= k\,Ln(k) - (k-1)Ln(k\,) - (k-1)Ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

$$= Ln(k\,) – (k-1)Ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

Or un développement limité de $Ln(1 + x\,)$ à l'ordre 3 donne :

$$Ln(1+x\ ) = x - \frac{1}{2}\ x^2 + \frac{1}{3}\ x^3 + o(x^3)$$

On en déduit :

$$Ln(k\ ) \text{-} (k-1) Ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

$$= Ln(k\ ) \text{-} (k-1)\left(-\frac{1}{k} - \frac{1}{2\ k^2} - \frac{1}{3\ k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)$$

$$= Ln(k\ ) \text{-} \left(-1 - \frac{1}{2\ k} - \frac{1}{3\ k^2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2\ k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

$$= Ln(k\ ) + 1 - \frac{1}{2\ k} - \frac{1}{6\ k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

d’où :

$$Ln(n^n) = \sum_{k=2}^{n} Ln(k\ ) + \sum_{k=2}^{n} 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{6} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

Rappelons le développement asymptotique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = Ln(n) + C + o(1)$$

où C est la constante d’Euler.

On en déduit :

$$Ln(n^n) = Ln(n\ !) + (n-1) - \frac{1}{2}\big(Ln(n) - 1 + C + o(1)\big) - \frac{1}{6}\ U_n$$

U_n est la somme partielle d’une série dont le terme général vérifie :

$$\frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \sim \frac{1}{k^2}$$

Cette série converge donc vers une limite que nous noterons L

Ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{Ln(n^n) = Ln(n\ !) + n - Ln\big(\sqrt{n}\big) - \frac{1}{2} + C + L + o(1)}}$$

Etape 4 :

$$Ln(n^n) - Ln(n\,!) - Ln(e^n) + Ln(\sqrt{n}) + Ln(\sqrt{e}) = C + L + o(1)$$

$$Ln\left(\frac{n^n\,\sqrt{n\,e}}{n\,!\;e^n}\right) = C + L + o(1)$$

$$\frac{n^n\,\sqrt{n\,e}}{n\,!\;e^n} = e^{C+L+o(1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n\,\sqrt{n\,e}}{n\,!\;e^n} = e^{C+L} = a > 0$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{n\,! \sim a\,\frac{n^n\,\sqrt{n\,e}}{e^n}}}$$

Etape 5 :

L'équivalent précédent fait apparaître une constante a qui n'est pas connue, à ce stade. Cependant, dans le fichier consacré aux intégrales impropres remarquables, nous avons fait apparaitre une évaluation et un équivalent pour la suite intégrale de Wallis :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)\,dt$$

$$J_{2\,n} = \frac{(2\,n)\,!}{(2^n\,n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\sqrt{n}}$$

Remplaçons alors, dans la relation précédente, les deux factoriels par leurs équivalents obtenus par la formule de l'étape 4 :

$$\frac{a\,(2\,n)^{2\,n}\,\sqrt{2\,n\,e}\;\;e^{-2\,n}}{\left(2^n\,a\,n^n\,\sqrt{n\,e}\,e^{-\,n}\right)^2} \times \frac{\pi}{2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\sqrt{n}}$$

$$\frac{a\,2^{2\,n}\,n^{2\,n}\sqrt{2\,n\,e}\,e^{-2\,n}}{a^2\,2^{2\,n}\,n^{2\,n}\,n\,e\,e^{-2\,n}} \times \frac{\pi}{2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\sqrt{n}}$$

$$\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2\,a\,\sqrt{n}\,\sqrt{e}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\sqrt{n}}$$

$$\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2\,a\,\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$a = \frac{\sqrt{2\,\pi}}{\sqrt{e}}$$

On en déduit finalement l'équivalent de Stirling :

$$\boxed{\boldsymbol{n\,! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \sqrt{2\,\pi\,n}}}$$