Recherche des sous espaces propres d'une matrice carrée

I **Rappels**

Dans toute la suite A désigne une matrice carrée carrée d'ordre n, X un vecteur-colonne d'ordre n. On notera : $A_1^{col}, A_2^{col}, \dots, A_n^{col}$, les n vecteurs-colonne de A et $A_1^{lig}, A_2^{lig}, \dots, A_n^{lig}$, ses n vecteurs-ligne

On rappelle, 0 désignant un vecteur-colonne de composantes nulles :

La définition du noyau de A

$$N(A) = \{X \in \mathcal{M}_{\mathrm{n1}}(\mathbb{R}) : A\,X = 0\}$$

La définition du rang de A :

$$rg(A) = \dim Vect[A_1^{col}, A_2^{col}, \dots, A_n^{col}]$$

La définition d'une valeur propre de A

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda\ valeur\ propre\ de\ A\ &\Leftrightarrow \exists\, X \neq 0 :\ A\,X = \lambda\,X \\ &\Leftrightarrow \exists\, X \neq 0 :\ (A - \lambda\, I_n)\,X = 0 \\ &\Leftrightarrow N(A - \lambda\, I_n) \neq \{0\} \end{aligned}}$$

La définition du sous espace propre associé à une valeur propre λ de A :

$$\boxed{E_\lambda = N(A - \lambda\, I_n)}$$

Le théorème du rang :

$$\boxed{dim\big(N(A - \lambda\, I_n)\big) + rg(A - \lambda\, I_n) = n}$$

D'où découle :

$$\boxed{\lambda\ valeur\ propre\ de\ A\ \Leftrightarrow\ rg(A - \lambda\, I_n) < n}$$

II Conservation du rang et du noyau par échange de lignes

Désignons par $A_{p\leftrightarrow q}^{lig}$ la matrice obtenue en échangeant les vecteurs-ligne A_p^{lig} et A_q^{lig} de A. Alors on a :

$$N\left(A_{p\leftrightarrow q}^{lig}\right) = N(A)$$

$$rg\left(A_{p\leftrightarrow q}^{lig}\right) = rg(A)$$

Preuve :

Afin d'éviter la lourdeur de notations, nous nous contenterons de la preuve dans le cas $n = 3$. Le lecteur pourra généraliser sans difficultés.

Posons :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Et toujours sans nuire à la généralité, échangeons les lignes 1 et 3 :

$$A_{1\leftrightarrow 3}^{lig} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$X \in N(A) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = 0 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 = 0 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 = 0 \end{cases}$$

Or ce système d'équations est équivalent à celui obtenu en échangeant les équations 1 et 3 soit :

$$\begin{cases} a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 = 0 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 = 0 \\ a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = 0 \end{cases}$$

Et ce système équivaut à :

$$X \in N\left(A_{1\leftrightarrow 3}^{lig}\right)$$

Donc :

$$N\left(A_{1\leftrightarrow 3}^{lig}\right) = N(A)$$

En utilisant le théorème du rang, on en déduit :

$$rg\left(A_{1\leftrightarrow 3}^{lig}\right) = rg(A)$$

III <u>Conservation du rang et du noyau en remplaçant un vecteur-ligne par une combinaison de ce vecteur ligne avec un autre vecteur-ligne</u>

Désignons par $A_{\alpha\ p+\beta\ q}^{comb}$ la matrice obtenue en remplaçant dans A le vecteur-ligne A_p^{lig} par le vecteur-ligne défini par la combinaison : $\alpha\ A_p^{lig} + \beta\ A_q^{lig}$ avec $\alpha \neq 0$. Alors :

$$N\left(A_{\alpha\ p+\beta\ q}^{comb}\right) = N(A)$$

$$rg\left(A_{\alpha\ p+\beta\ q}^{comb}\right) = rg(A)$$

<u>Preuve</u> :

Afin d'éviter la lourdeur de notations, nous nous contenterons de la preuve dans le cas $n = 3$ et pour :

$$A_{\alpha\ 1+\beta\ 2}^{comb} = \begin{pmatrix} (\alpha\ a_{11} + \beta\ a_{21}) & (\alpha\ a_{12} + \beta\ a_{22}) & (\alpha\ a_{13} + \beta\ a_{23}) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$X \in N(A) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 = 0 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 = 0 \\ a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Or ce système d'équations est équivalent à celui obtenu en remplaçant l'équation 1 par sa combinaison avec l'équation 2 avec les coefficients α et β, soit :

$$\begin{cases} (\alpha\ a_{11} + \beta\ a_{21})\ x_1 + (\alpha\ a_{12} + \beta\ a_{22})\ x_2 + (\alpha\ a_{12} + \beta\ a_{22})\ x_3 = 0 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 = 0 \\ a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Et ce sytème équivaut à :

$$X \in N\left(A_{\alpha\ 1+\beta\ 2}^{comb}\right)$$

Donc :

$$N\left(A_{\alpha\ 1+\beta\ 2}^{comb}\right) = N(A)$$

En utilisant le théorème du rang, on en déduit :

$$rg\left(A_{\alpha\ 1+\beta\ 2}^{comb}\right) = rg(A)$$

IV Application à une méthode pour déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres d'une matrice carrée

Un exemple suffira à illustrer la méthode :

Soit à déterminer les sous espaces propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 12 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Afin de se débarrasser des fractions, notons que l'on a :

$$A\,X = \lambda\,X \Leftrightarrow\ (4\,A)\,X = (4\,\lambda\,)X$$

Autrement dit, un sous espace propre de A associé à la valeur propre λ définit un sous espace propre de $B = 4\,A$ associé à la valeur propre $4\,\lambda$. Il nous suffit donc de déterminer les sous espaces propres de B pour obtenir ceux de A. Or :

$$B = 4\,A = \begin{pmatrix} 0 & 52 & 48 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B - \lambda\,I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 52 & 48 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Cette matrice a alors même noyau que celle obtenue par échange des deux premières lignes

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 52 & 48 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Puis en remplaçant la seconde par combinaison des deux premières avec les coefficients respectifs λ et 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & (52 - \lambda^2) & 48 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Puis échange des deux dernières :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda \\ 0 & (52 - \lambda^2) & 48 \end{pmatrix}$$

Puis en remplaçant la dernière par une combinaison des deux dernières avec les coefficients respectifs $(52 - \lambda^2)$ et (-2) :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda\,(52-\lambda^2)-96 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda^3-52\,\lambda-96) \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de B sont alors les valeurs de λ pour lesquelles cette matrice a un rang strictement inférieur à 3 donc telles que :

$$\lambda^3-52\,\lambda-96=0$$

En testant les premiers diviseurs de 96 on constate que -2 est solution. On peut donc factoriser le polynôme ci-dessus et l'équation devient, après identification :

$$(\lambda+2)\,(\lambda^2-2\,\lambda-48)=0$$

Finalement, en factorisant le polynôme de second degré, on aboutit à :

$$(\lambda+2)\,(\lambda+6)(\lambda-8)=0$$

B a donc pour valeurs propres $-6,-2,8$ et A les valeurs précédentes divisées par 4 soit :

$$-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},2$$

Déterminons les sous espaces propres de A :

$$E_{-\frac{3}{2}}=Ker\left(A+\frac{3}{2}\,I_3\right)=Ker\,(B+6\,I_3)$$

$$=Ker\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce sous espace est caractérisé par le système d'équations :

$$\begin{cases} x+6\,y=0 \\ 2\,y+6\,z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=18\,z \\ y=-3\,z \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{E_{-\frac{3}{2}}=Vect\left[\begin{pmatrix} 18 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]}$$

$$E_{-\frac{1}{2}} = Ker \left(A + \frac{1}{2}\, I_3\right) = Ker\,(B + 2\, I_3)$$

$$= Ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce sous espace est caractérisé par le système d'équations :

$$\begin{cases} x + 2\, y = 0 \\ 2\, y + 2\, z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\, z \\ y = -\, z \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{E_{-\frac{1}{2}} = Vect\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]}$$

$$E_2 = Ker\,(A - 2\, I_3) = Ker\,(B - 8\, I_3)$$

$$= Ker \begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce sous espace est caractérisé par le système d'équations :

$$\begin{cases} x - 8\, y = 0 \\ 2\, y - 8\, z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 32\, z \\ y = 4\, z \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{E_{-\frac{1}{2}} = Vect\left[\begin{pmatrix} 32 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right]}$$

La matrice A possédant une base de vecteurs propres, elle est donc diagonalisable.