Somme de lois normales indépendantes

Je vais vous montrer dans ce fichier que la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale est une loi normale. Je vous présenterai deux démonstrations. La première, directe est un peu lourde à développer, même si dans son principe, elle ne présente aucune difficulté. Je vous l'expose comme une sorte de défi en vous invitant à la refaire vous-même pour vous réconcilier avec l'algèbre littérale.

La seconde démonstration montrera comment pallier astucieusement à la difficulté précédente, nous ne sommes pas au pays d'Astérix le petit rusé pour rien.

Mais, comme nous allons utiliser dans les deux démonstrations la factorisation canonique des polynômes du second degré, il me paraît utile d'en rappeler les grands principes au préalable.

Voilà, fini le blabla, à vos marques, prêts !!!

Factorisation canonique du second degré :

Soit un polynôme du second degré de la variable x, c'est-à-dire rappelons le, une expression de la forme :

$$P(x) = a\,x^2 + b\,x + c \qquad \text{avec } a \neq 0$$

Voici les étapes de la factorisation, notez les bien, car dans la démonstration, il s'agira de les reproduire scrupuleusement.

Factorisation du coefficient a :

$$P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right)$$

Mise en évidence d'un facteur 2 sur le terme en x :

$$P(x) = a\left(x^2 + 2\left(\frac{b}{2\,a}\right)x + \frac{c}{a}\right)$$

Reconnaissance du début d'un développement remarquable :

$$P(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2\,a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2\,a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

Plus précisément, nous utilisons ce fait :

$$x^2 + 2\,B\,x = (x+B)^2 - B^2$$

Mise au même dénominateur :

$$P(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2\,a}\right)^2 + \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a^2}\right)$$

Voilà, comme vous allez voir, l'essentiel de la démonstration tient dans cette technique

Enoncé du théorème :

Soient deux variables aléatoires X et Y indépendantes suivant une loi normale :

$$\mathbf{X \backsim \mathcal{N}(m;\ \sigma^2)}$$

$$\mathbf{Y \backsim \mathcal{N}(m';\ \sigma'^2)}$$

m et m' étant les espérances respectives de X et Y, et $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\sigma'}$ leur écart type.

Alors la variable $\mathbf{Z = X + Y}$ suit une loi normale telle que :

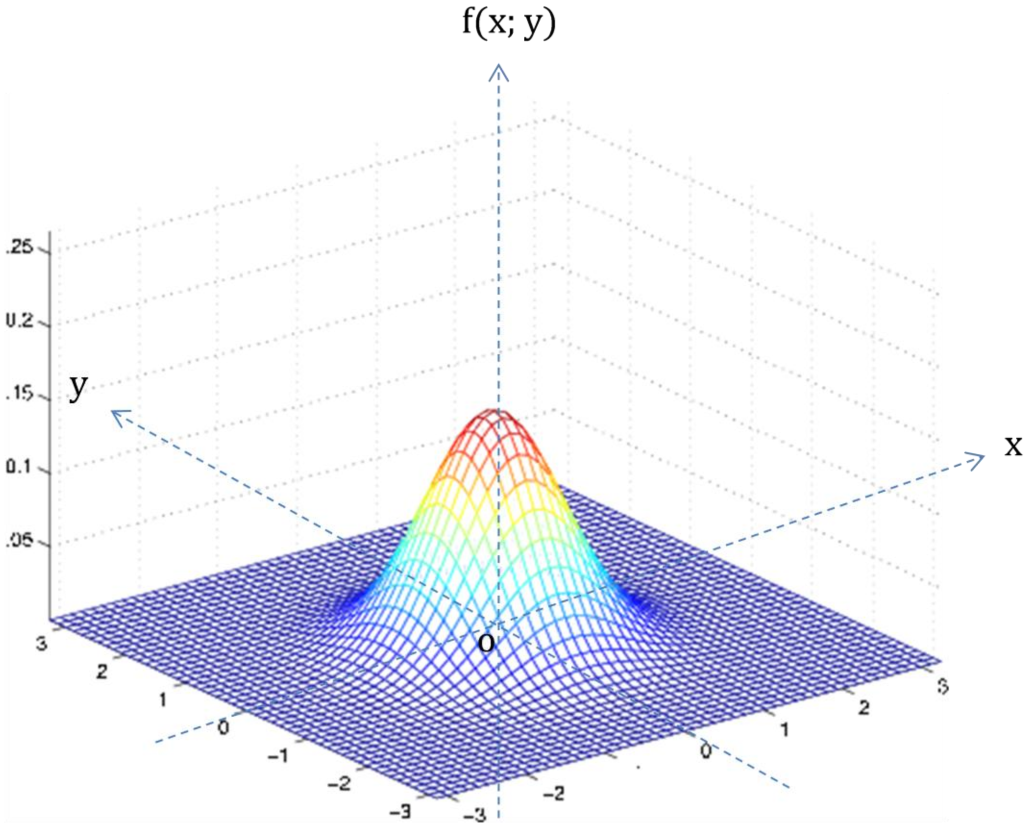
$$\mathbf{X \backsim \mathcal{N}(m + m';\ \sigma^2 + \sigma'^2)}$$

Première démonstration du théorème :

1ère étape : visualisation tridimensionnelle

Nous allons commencer d'abord visualiser la distribution conjointe de X et Y à l'aide d'une représentation tridimensionnelle.

Dans un plan (0 ; x ; y) nous pouvons nous représenter ainsi tous les couples (x ; y) possibles d'issues du couple de variables (X ; Y).



La distribution est alors figurée par une nappe associée à une fonction de deux variables appelée **densité de probabilité conjointe** et définie par :

$$\boxed{f(x\,;y)dx\,dy = P(x \leq X < x + dx \cap \ y \leq Y < y + dy)}$$

ce qui, autrement dit, définit la probabilité pour le couple (X ; Y) d'avoir ses valeurs dans un domaine D du plan (0 ; x ; y) comme étant le volume situé entre ce domaine et la nappe :

$$\boxed{P((X\,;\ Y) \in D) = \iint_D f(x\,;y)dx\,dy}$$

Pour des variables X et Y indépendantes, nous avons cependant en plus :

$$P(x \leq X < x + dx \cap\ y \leq Y < y + dy)$$

$$= P(x \leq X < x + dx) \times\ P(\,y \leq Y < y + dy)$$

$$= f_{\mathbf{X}}(x)\ dx\ \ f_{\mathbf{Y}}(y)\ dx$$

Soit :

$$\boxed{f(x\,;y) = f_{\mathbf{X}}(x)\ \ f_{\mathbf{Y}}(y)}$$

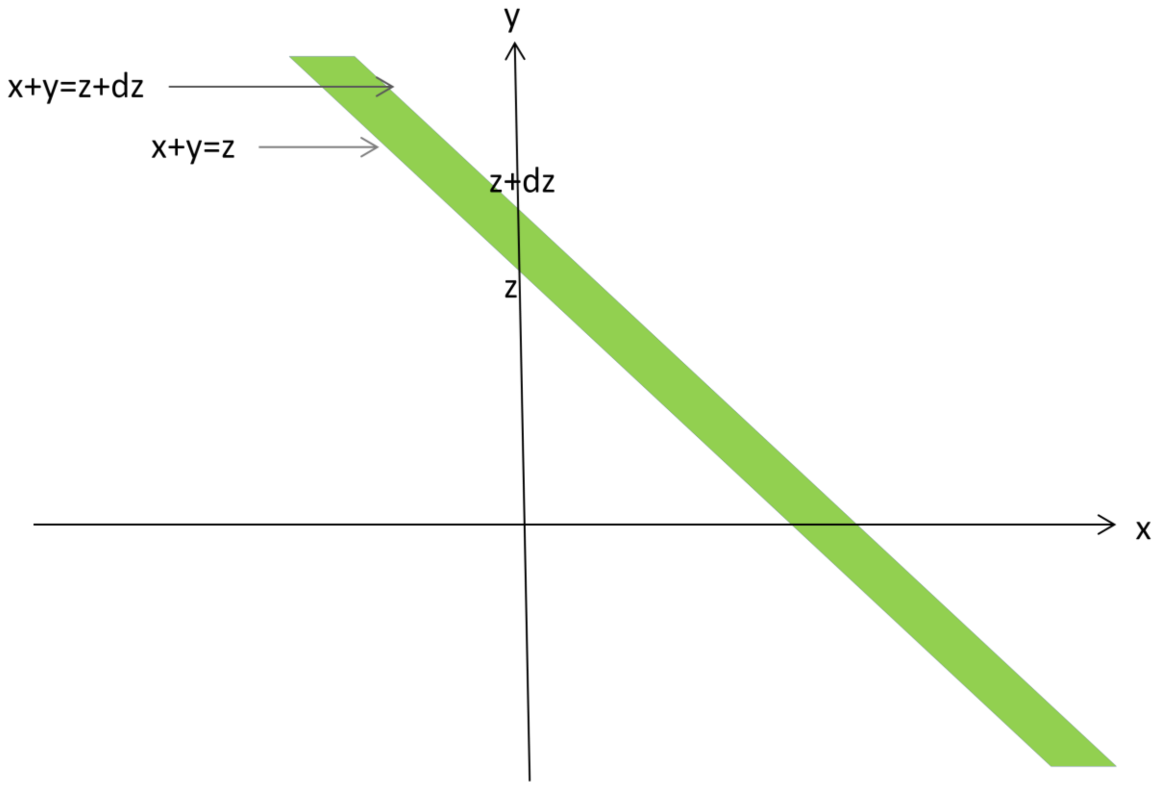
Autrement dit, la densité de probabilité conjointe est le produit des densités de probabilité de chaque variable.

<u>2ème étape : densité de Z</u>

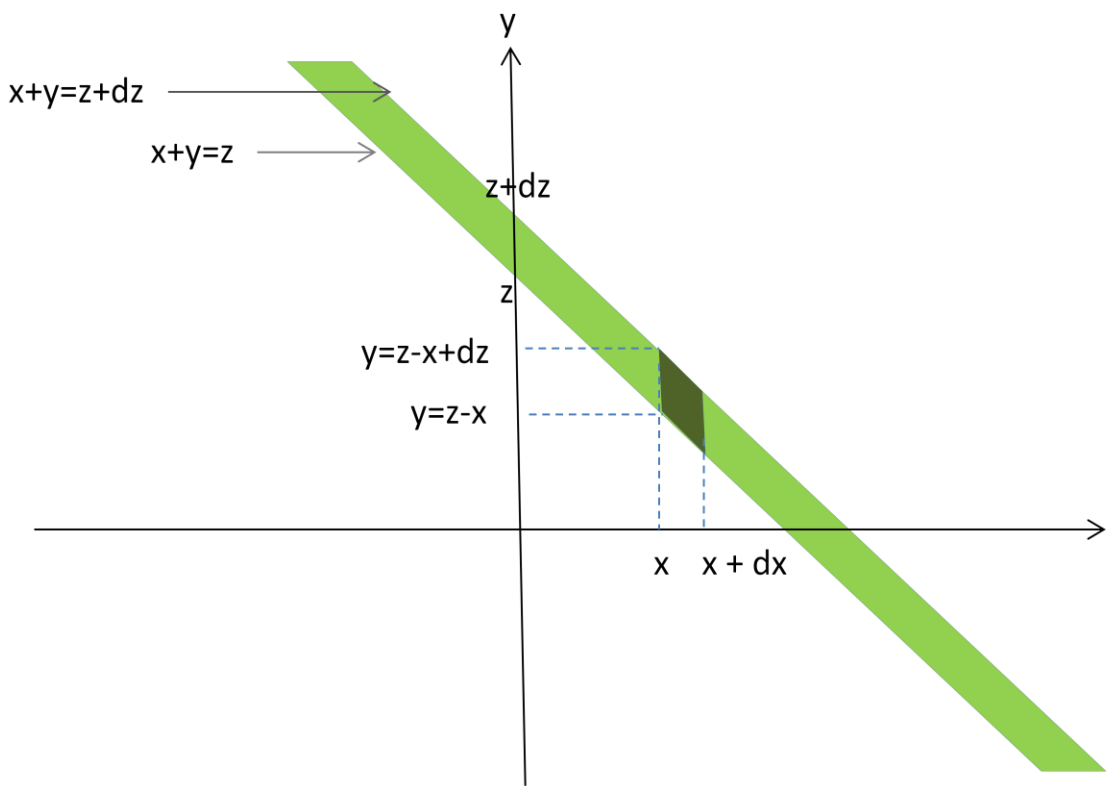
Nous allons maintenant visualiser dans notre espace de représentation tridimensionnel la densité de Z afin de pouvoir la calculer. Rappelons en pour cela la définition :

$$\boxed{f_Z(z)dz\ = P(z \leq Z < z + dz) = P(z \leq X + Y < z + dz)}$$

$f_Z(z)dz$ est donc l'intégrale de la fonction de densité conjointe sur le domaine compris entre les droites d'équation $x + y = z$ et $x + y = z + dz$. Ce domaine est figuré en vert sur le dessin ci-dessous.

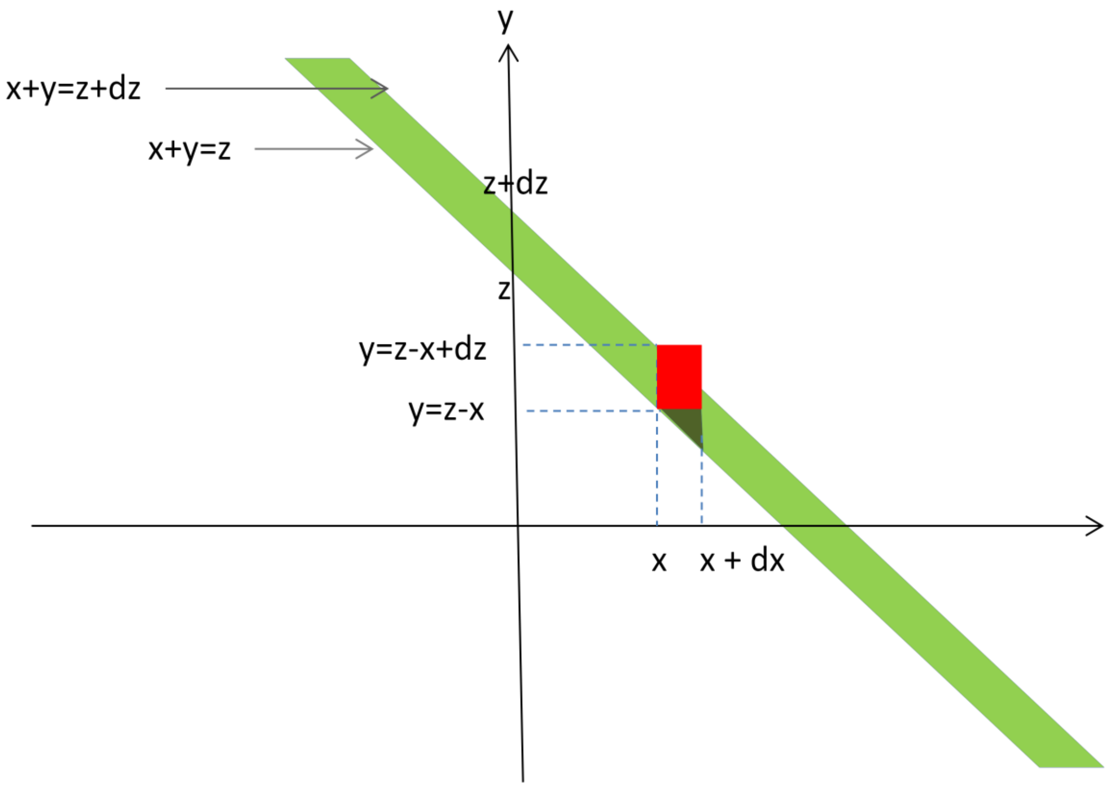


Considérons alors la portion de ce domaine située entre les abscisses x et x+ dx (parallélogramme en vert plus foncé sur la figure).



Puisque dx et dz sont des infiniments petits, nous pouvons considérer f(x ; y) comme localement constante autour du point M(x ; z-x) pour le calcul de l'intégrale.

L'intégrale de f sur le parallélogramme vert foncé est alors la même que celle sur le rectangle de même aire figuré en rouge.



Or ce rectangle correspond à l'évènement :

$$E = (x \leq X < x + dx) \cap (z - x \leq Y < z - x + dz)$$

Et la probabilité (infiniment petite également) de cet évènement est:

$$dP(E) = P(x \leq X < x + dx)\ P(z - x \leq Y < z - x + dz)$$

$$= f_X(x)\ dx\ \ f_Y(z - x)\ dz$$

Nous avons donc en intégrant tout ces petits rectangles :

$$f_Z(z)dz = \iint_D f(x\,;y)dx\,dy = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} dP(E)$$

Soit :

$$f_Z(z)dz = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f_X(x)\ \ f_Y(z-x)\ dx\ dz$$

Finalement, en sortant dz de l'intégrale et en simplifiant :

$$\boxed{f_Z(z) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f_X(x)\ \ f_Y(z-x)\ dx}$$

Cette formulation s'appelle **produit de convolution** de f_X et de f_Y.

<u>3ème étape : les calculs !!!!</u>

C'est à partir de là que le calcul commence vraiment. Alors vous êtes prêts ? Essuyez vos lunettes, mouchez vous un bon coup, frottez vous les yeux, bâillez une dernière fois et suivez moi, c'est pas si compliqué (le doliprane, on devrait s'en passer).

D'abord, rappelons les densités associées aux lois normales suivies par X et Y :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma'\sqrt{2\,\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m'}{\sigma'}\right)^2}$$

Nous en déduisons :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma\,\sigma'} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-x-m'}{\sigma'}\right)^2}\ dx$$

Intéressons nous à la fonction à intégrer :

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-x-m'}{\sigma'}\right)^2}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{x-(z-m')}{\sigma'}\right)^2\right]}$$

Considérons maintenant l'expression entre crochets et développons là et mettons là au même dénominateur :

$$\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{x-(z-m')}{\sigma'}\right)^2$$

$$=\frac{\sigma'^2(x-m)^2+\sigma^2\big(x-(z-m')\big)^2}{\sigma^2\,\sigma'^2}$$

$$=\frac{\sigma'^2(x^2-2\,m\,x+m^2)+\sigma^2(x^2-2\,(z-m')\,x+(z-m')^2)}{\sigma^2\,\sigma'^2}$$

$$=\frac{(\sigma'^2+\sigma^2)\,x^2-2\big(m\,\sigma'^2+(z-m')\,\sigma^2\big)\,x+m^2\sigma'^2+(z-m')^2\,\sigma^2}{\sigma^2\,\sigma'^2}$$

$$=\frac{(\sigma'^2+\sigma^2)}{\sigma^2\,\sigma'^2}\left(x^2-2\left(\frac{m\,\sigma'^2+(z-m')\,\sigma^2}{\sigma'^2+\sigma^2}\right)x+\frac{m^2\sigma'^2+(z-m')^2\,\sigma^2}{\sigma'^2+\sigma^2}\right)$$

$$=\frac{(\sigma'^2+\sigma^2)}{\sigma^2\,\sigma'^2}\left(\left(x-\frac{m\,\sigma'^2+(z-m')\,\sigma^2}{\sigma'^2+\sigma^2}\right)^2-\left(\frac{m\,\sigma'^2+(z-m')\,\sigma^2}{\sigma'^2+\sigma^2}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{m^2\sigma'^2+(z-m')^2\,\sigma^2}{\sigma'^2+\sigma^2}\right)$$

Empressons nous de faire un changement de variable en posant :

$$t=x-\frac{m\,\sigma'^2+(z-m')\,\sigma^2}{\sigma'^2+\sigma^2}$$

L'expression devient alors :

$$\frac{(\sigma'^2+\sigma^2)}{\sigma^2\,\sigma'^2}\left(t^2-\frac{\big(m\,\sigma'^2+(z-m')\,\sigma^2\big)^2}{\big(\sigma'^2+\sigma^2\big)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(m^2\sigma'^2+(z-m')^2\,\sigma^2)\big(\sigma'^2+\sigma^2\big)}{\big(\sigma'^2+\sigma^2\big)^2}\right)$$

Ceux qui décrochent sont invités à se rendre illico à la seconde démonstration, les autres, patience, nous arrivons au bout de nos peines. Le développement des quantités mises au même dénominateur conduit en effet à des éliminations de termes :

$$\frac{\left(\sigma'^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,\sigma'^2}\left(t^2+\frac{-2\,m\,(z-m')\,\sigma^2\,\sigma'^2+m^2\sigma^2\sigma'^2+(z-m')^2\,\sigma^2\sigma'^2}{\left(\sigma'^2+\sigma^2\right)^2}\right)$$

Et en développant à nouveau, une belle simplification !

$$\frac{\left(\sigma'^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,\sigma'^2}t^2+\frac{-2\,m\,(z-m')+m^2+(z-m')^2}{\sigma'^2+\sigma^2}$$

Reste à continuer à simplifier l’expression en z en développant :

$$\frac{\left(\sigma'^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,\sigma'^2}t^2+\frac{-\,2\,m\,z+2\,m\,m'+m^2+z^2-2\,m'z+m'^2}{\sigma'^2+\sigma^2}$$

$$\frac{\left(\sigma'^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,\sigma'^2}t^2+\frac{z^2-2\,(m+m')\,z+m^2+2\,m\,m'+m'^2}{\sigma'^2+\sigma^2}$$

Et là miracle, ça grouille d’identités remarquables !

Et d’une !

$$\frac{\left(\sigma'^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,\sigma'^2}t^2+\frac{z^2-2\,(m+m')\,z+(m+m')^2}{\sigma'^2+\sigma^2}$$

Et de deux !

$$\frac{\left(\sigma'^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,\sigma'^2}t^2+\frac{\left(z-(m+m')\right)^2}{\sigma'^2+\sigma^2}$$

Avouez qu’il ne reste pas grand-chose de l’affreuse expression initiale. C’est que le grand horloger a bien travaillé !

Remettons alors cela dans notre contexte intégral de départ :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma\,\sigma'} \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\sigma'^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,\sigma'^2}t^2 + \frac{\left(z-(m+m')\right)^2}{\sigma'^2+\sigma^2}\right]} dx$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma\,\sigma'} e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(z-(m+m')\right)^2}{\sigma'^2+\sigma^2}} \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\sigma'^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,\sigma'^2}t^2\right]} dx$$

Posons alors :

$$\sigma'' = \sqrt{\sigma'^2 + \sigma^2}$$

Alors :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma\,\sigma'} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-(m+m')}{\sigma''}\right)^2} \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma''^2}{\sigma^2\,\sigma'^2}t^2\right]} dt$$

Faisons encore le changement de variable :

$$u = \frac{\sigma''}{\sigma\,\sigma'\sqrt{2}}t$$

soit :

$$dt = \frac{\sigma\,\sigma'\sqrt{2}}{\sigma''}du$$

alors :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma\,\sigma'} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-(m+m')}{\sigma''}\right)^2} \frac{\sigma\,\sigma'\sqrt{2}}{\sigma''} \int_{u=-\infty}^{u=+\infty} e^{-u^2}\,du$$

Rappelons que :

$$\int_{u=-\infty}^{u=+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$$

Nous en déduisons :

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{1}{\sigma''\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-(m+m')}{\sigma''}\right)^2}}$$

Ouf ! Vous pouvez vous éponger le front et essorer vos neurones, c'est fini. Alors, vous reconnaissez la fonction de densité d'une loi normale d'espérance m + m' et d'écart type σ'' et vous vous dites, on ne me le refera plus ce coup là, je suis bon pour deux jours de migraine.

Eh bien non ! Car en maths, il y a toujours des astuces pour éviter les calculs fastidieux qui valaient à leurs auteurs le surnom de taupin la brute, à l'époque glorieuse des classes préparatoires, où l'enseignement tenait encore debout avec des professeurs qui n'avaient pas froid aux yeux quand il s'agissait de démontrer (bon voyez cela comme de la mauvaise humeur, vous aussi ils vous arrivent d'être grognon, non ?)

__Deuxième démonstration du théorème__ :

L'astuce pour simplifier la démarche consiste à traiter le cas particulier où les deux variables aléatoires ont une espérance nulle et l'une d'elle, Y par exemple, un écart type de 1.

Le procédé est alors identique au précédent mais avec un volume de calculs bien moindre. Il suffit de remplacer m et m' par 0 et σ' par 1.

Nous avons alors :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-x}{1}\right)^2}\, dx$$

Il suffit alors de factoriser l'expression

$$\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 + (x-z)^2$$

$$= \frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{\sigma^2(x-z)^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{x^2 + \sigma^2(x^2 - 2\,x\,z + z^2)}{\sigma^2}$$

$$= \frac{(1+\sigma^2)x^2 - 2\,\sigma^2 z\,x + \sigma^2\,z^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{(1+\sigma^2)}{\sigma^2}\left(x^2 - 2\,\frac{\sigma^2 z}{1+\sigma^2}\,x + \frac{\sigma^2\,z^2}{1+\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{(1+\sigma^2)}{\sigma^2}\left(\left(x - \frac{\sigma^2 z}{1+\sigma^2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma^2 z}{1+\sigma^2}\right)^2 + \frac{\sigma^2\,z^2}{1+\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{(1+\sigma^2)}{\sigma^2}\left(t^2 + \frac{\sigma^2\,z^2(1+\sigma^2) - \sigma^4 z^2}{(1+\sigma^2)^2}\right)$$

$$= \frac{(1+\sigma^2)}{\sigma^2}\left(t^2 + \frac{\sigma^2\,z^2}{(1+\sigma^2)^2}\right)$$

$$= \frac{(1+\sigma^2)}{\sigma^2}t^2 + \frac{z^2}{1+\sigma^2}$$

Ainsi :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma}\int_{t=-\infty}^{t=+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\sigma^2)}{\sigma^2}t^2 + \frac{z^2}{1+\sigma^2}\right]}\,dx$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right)^2}\int_{t=-\infty}^{t=+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\sigma^2)}{\sigma^2}t^2\right]}\,dx$$

Là encore on pose :

$$\sigma'' = \sqrt{1+\sigma^2}$$

Et on fait un changement de variable dans l'intégrale :

$$u = \frac{\sigma''}{\sigma\,\sqrt{2}}\,t$$

soit :

$$dt = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sigma''} du$$

il vient alors :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma''}\right)^2} \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sigma''}\sqrt{\pi}$$

Ce qui après simplification, donne le résultat cherché :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma''}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma''}\right)^2}$$

Reste alors à étendre ce résultat au cas général. Pour cela, il suffit de considérer les variables X' et Y' définies comme suit :

$$X' = \frac{X - m}{\sigma'}$$

$$Y' = \frac{Y - m'}{\sigma'}$$

X' et Y' étant des fonctions affines de variables suivant une loi normale, elles suivent également une loi normale. D'autre part, leur espérance est nulle et l'écart type de Y' est 1. Et elles sont également indépendantes.

D'après ce que nous venons de voir, la variable somme $Z' = X' + Y'$ suit également une loi normale.

Or la variable $Z = X + Y$ s'exprime par une relation affine en fonction de Z'. En effet :

$$Z = X + Y = \sigma' X' + m + \sigma' Y' + m' = \sigma'(X' + Y') + m + m'$$

Soit :

$$Z = \sigma' Z' + (m + m')$$

On en déduit (voir propriété dans l'annexe qui suit) que Z suit une loi normale et on a de plus :

$$E(Z) = E(X) + E(Y) = m + m'$$

$$V(Z) = V(X) + V(Y) = \sigma^2 + \sigma'^2$$

Ce qui en donne les paramètres caractéristiques

<u>**Annexe**</u> :

Revenons sur une propriété que nous avons mentionné et que nous allons démontrer ici :

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mathbf{m};\ \boldsymbol{\sigma}^2)$ et $\mathbf{Y = a\,X + b}$ (a non nul) est une fonction affine de X, alors Y suit une loi normale $\mathcal{N}(\mathbf{a\,m + b};\ \mathbf{a}^2\ \boldsymbol{\sigma}^2)$.

Voici la preuve :

Partons de la fonction de répartition de Y :

$$F_Y(y) = P(Y < y)$$

$$F_Y(y) = P(a\,X + b < y)$$

A ce stade, nous devons tenir compte du signe de a. Commençons par traiter le cas : $a > 0$

$$F_Y(y) = P\left(X < \frac{y-b}{a}\right)$$

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Dérivons cette relation pour faire apparaître les densités :

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{a}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-b}{a}-m}{\sigma}\right)^2}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{a\,\sigma\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(a\,m+b)}{a\,\sigma}\right)^2}$$

La densité de Y est celle d'une loi normale d'espérance $(a\ m + b)$ et d'écart type $a\ \sigma$ ce qui prouve le résultat.

Traitons alors le cas où : $a < 0$:

$$F_Y(y) = P\left(X > \frac{y-b}{a}\right)$$

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{-1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Finalement, on aboutit

$$f_Y(y) = \frac{1}{-a\ \sigma\sqrt{2\ \pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(a\ m+b)}{-a\ \sigma}\right)^2}$$

Ou encore :

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|\ \sigma\sqrt{2\ \pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(a\ m+b)}{|a|\ \sigma}\right)^2}$$

Dans les deux cas, Y suit une loi normale d'espérance $(a\ m + b)$ et d'écart type $|a|\ \sigma$, donc de variance $a^2\ \sigma^2$.