Somme de deux variables aléatoires

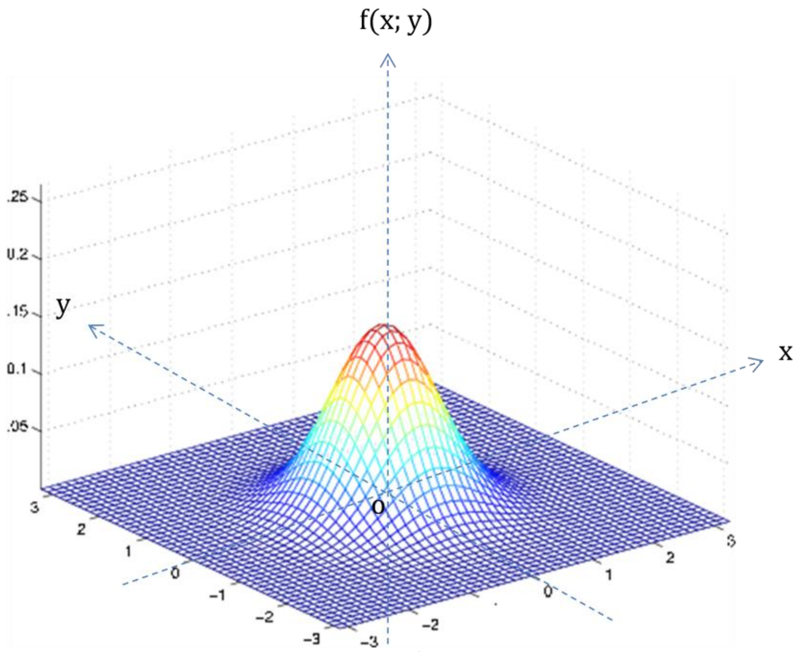
I densité d'une somme de deux variables aléatoires

a) densité conjointe

Soit X et Y deux variables aléatoires de densités respectives f_X et f_Y. La **densité conjointe** f est définie par :

$$f(x,y)\,dx\,dy = P(x \leq X < x + dx \cap\ y \leq Y < y + dy)$$

Illustrons la par un exemple :



$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

Si D est un domaine du plan (O,x,y) alors :

$$P(X \in D) = \iint_D f(x,y)dx\,dy$$

Autrement dit, cette probabilité est le volume situé entre la nappe d'équation $z = f(x, y)$, le cylindre droit s'appuyant sur la frontière de D et le domaine D.

La condition de normalisation se traduit par :

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)dx\,dy = 1$$

D'où la présence du facteur $1/\pi$ dans l'exemple.

Dans le cas particulier où les deux variables sont inépendantes, on a :

$$P(x \leq X < x + dx \cap\ y \leq Y < y + dy) = P(x \leq X < x + dx)\ \times P(y \leq Y < y + dy)$$

$$= f_X(x)\ dx\ \times f_Y(y)\ dy$$

Donc :

$$\boxed{f(x,y) = f_X(x)\ \ f_Y(y)}$$

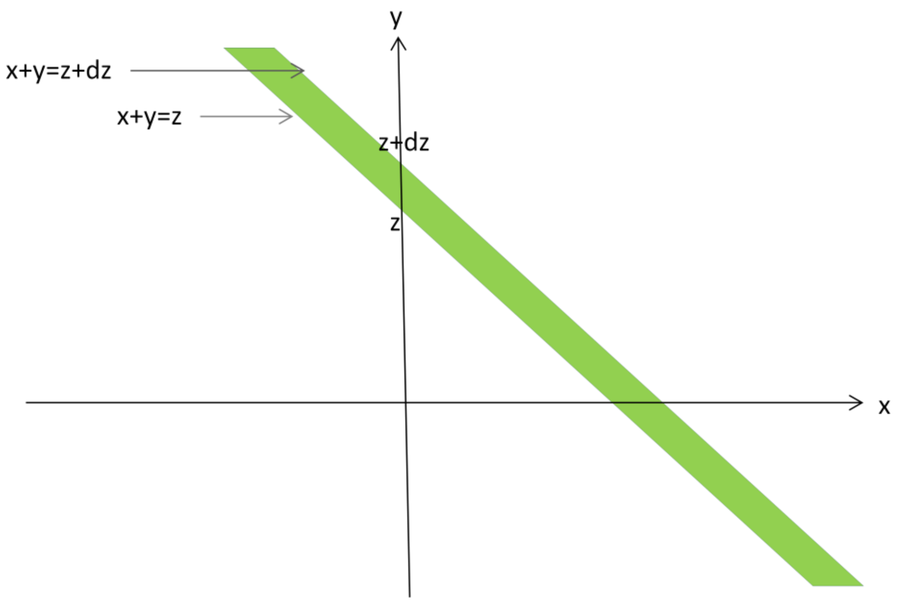
La densité de la loi conjointe de deux variables aléatoires indépendantes est donc le produit des densités de ces variables.

b) Densité de la somme de deux variables indépendantes

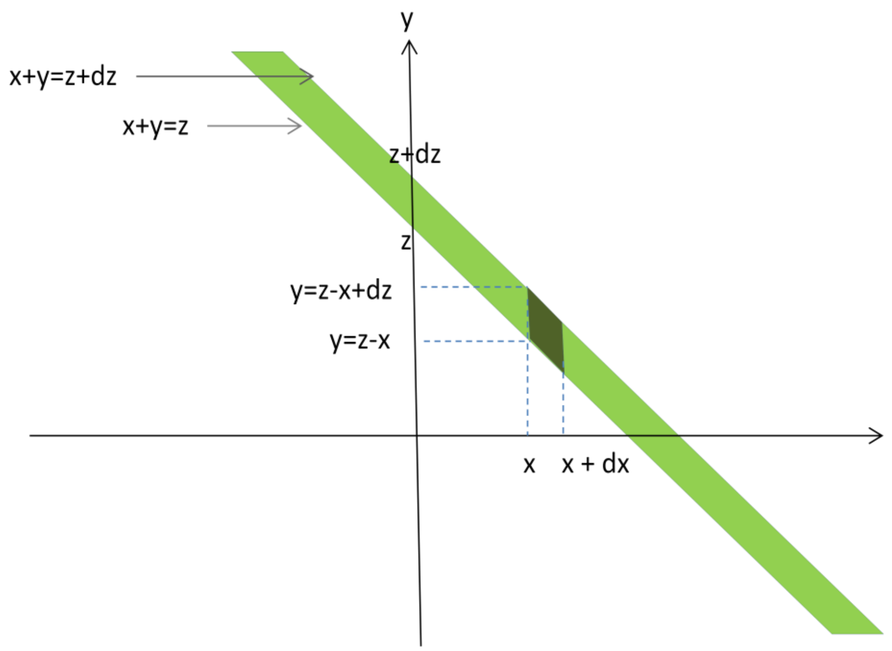
Soit $Z = X + Y$ la variable aléatoire somme des deux variables aléatoires indépendantes X et Y de densité conjointe définie précédemment. Déterminons la densité f_Z de Z en s'aidant d'une visualisation tridimensionnelle. Nous avons pour tout réel z :

$$f_Z(z)dz\ = P(z \leq Z < z + dz) = P(z \leq X + Y < z + dz)$$

$f_Z(z)dz$ est donc l'intégrale de la fonction de densité conjointe sur le domaine compris entre les droites d'équation $x + y = z$ et $x + y = z + dz$. Ce domaine est figuré en vert sur le dessin ci-dessous.

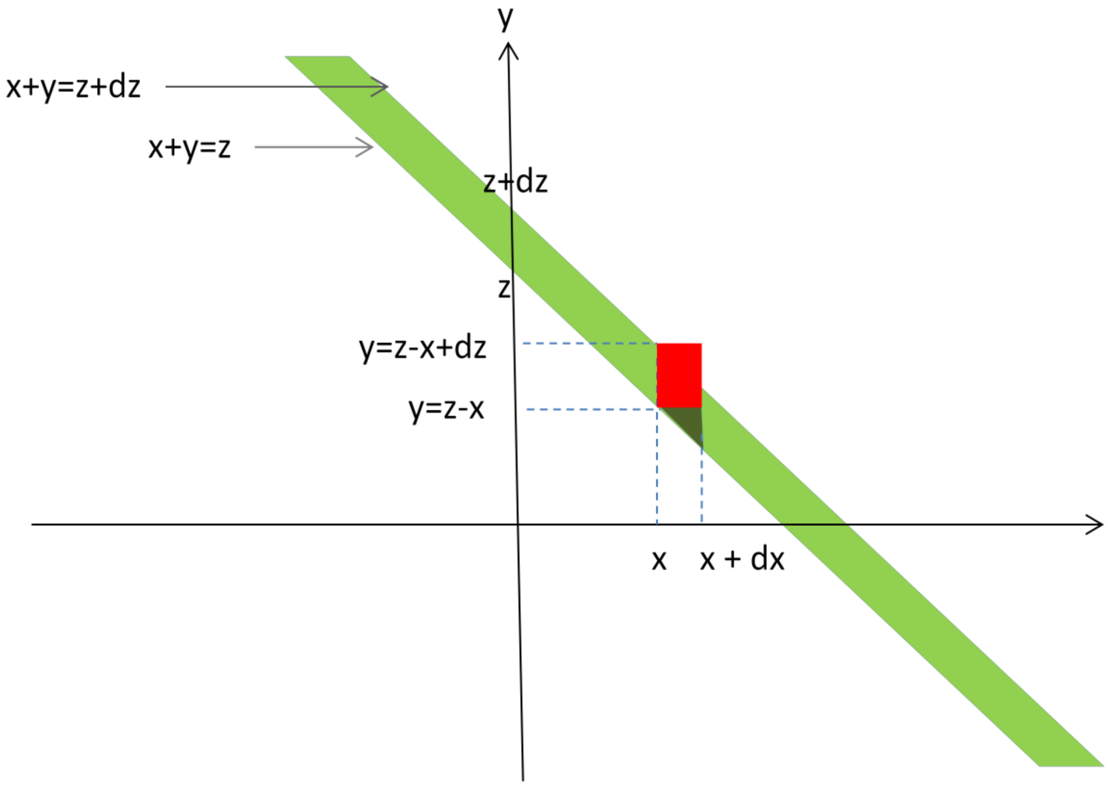


Considérons alors la portion de ce domaine située entre les abscisses x et $x + dx$ (parallélogramme en vert plus foncé sur la figure).



Puisque dx et dz sont des infiniments petits, nous pouvons considérer $f(x,y)$ comme localement constante autour du point $M(x\,;\,z\text{-}x)$ pour le calcul de l'intégrale.

L'intégrale de f sur le parallélogramme vert foncé est alors la même que celle sur le rectangle de même aire figuré en rouge.



Or ce rectangle correspond à l'évènement :

$$E = (x \leq X < x + dx) \cap (z - x \leq Y < z - x + dz)$$

Et la probabilité (infiniment petite également) de cet évènement est:

$$dP(E) = P(x \leq X < x + dx)\ P(z - x \leq Y < z - x + dz)$$

$$= f_X(x)\ dx\ \ f_Y(z - x)\ dz$$

Nous avons donc en intégrant tout ces petits rectangles :

$$f_Z(z)dz = \iint_D f(x\,;y)dx\,dy = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} dP(E)$$

Soit :

$$f_Z(z)dz = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f_X(x)\ \ f_Y(z - x)\ dx\ dz$$

Finalement, en sortant dz de l'intégrale et en simplifiant :

$$\boxed{f_Z(z) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f_X(x)\ \ f_Y(z - x)\ dx}$$

Cette formulation s'appelle **produit de convolution** de f_X et de f_Y.

II densité d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale

Enoncé du théorème :

Soient deux variables aléatoires X et Y indépendantes suivant une loi normale :

$$\boldsymbol{X \backsim \mathcal{N}(m;\ \sigma^2)}$$

$$\boldsymbol{Y \backsim \mathcal{N}(m';\ \sigma'^2)}$$

m et m' étant les espérances respectives de X et Y, et σ et σ′ leur écart type.

Alors la variable $Z = X + Y$ suit une loi normale telle que :

$$\boldsymbol{Z \backsim \mathcal{N}(m + m';\ \sigma^2 + \sigma'^2)}$$

Nous allons en donner deux démonstrations. Nous allons utiliser pour cela la factorisation canonique d'un polynôme du second degré :

$$P(x) = \ a\, x^2 + b\, x + c = a\, \left(\left(x + \frac{b}{2\, a} \right)^2 + \frac{4\, a\, c - b^2}{4\, a^2} \right)$$

Première démonstration

Les densités associées aux lois normales suivies par X et Y sont :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\, \sqrt{2\, \pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma'\, \sqrt{2\, \pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m'}{\sigma'}\right)^2}$$

Nous en déduisons :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\, \pi\, \sigma\, \sigma'} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-x-m'}{\sigma'}\right)^2}\, dx$$

Intéressons nous à la fonction à intégrer :

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-x-m'}{\sigma'}\right)^2}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{x-(z-m')}{\sigma'}\right)^2\right]}$$

Considérons maintenant l'expression entre crochets et développons là et mettons là au même dénominateur :

$$\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{x-(z-m')}{\sigma'}\right)^2$$

$$= \frac{{\sigma'}^2(x-m)^2+\sigma^2\big(x-(z-m')\big)^2}{\sigma^2\,{\sigma'}^2}$$

$$= \frac{{\sigma'}^2(x^2-2\,m\,x+m^2)+\sigma^2(x^2-2\,(z-m')\,x+(z-m')^2)}{\sigma^2\,{\sigma'}^2}$$

$$= \frac{\left({\sigma'}^2+\sigma^2\right)x^2-2\left(m\,{\sigma'}^2+(z-m')\,\sigma^2\right)x+m^2{\sigma'}^2+(z-m')^2\,\sigma^2}{\sigma^2\,{\sigma'}^2}$$

$$= \frac{\left({\sigma'}^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,{\sigma'}^2}\left(x^2-2\left(\frac{m\,{\sigma'}^2+(z-m')\,\sigma^2}{{\sigma'}^2+\sigma^2}\right)x+\frac{m^2{\sigma'}^2+(z-m')^2\,\sigma^2}{{\sigma'}^2+\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{\left({\sigma'}^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,{\sigma'}^2}\left(\left(x-\frac{m\,{\sigma'}^2+(z-m')\,\sigma^2}{{\sigma'}^2+\sigma^2}\right)^2-\left(\frac{m\,{\sigma'}^2+(z-m')\,\sigma^2}{{\sigma'}^2+\sigma^2}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{m^2{\sigma'}^2+(z-m')^2\,\sigma^2}{{\sigma'}^2+\sigma^2}\right)$$

Empressons nous de faire un changement de variable en posant :

$$t = x-\frac{m\,{\sigma'}^2+(z-m')\,\sigma^2}{{\sigma'}^2+\sigma^2}$$

L'expression devient alors :

$$\frac{\left({\sigma'}^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,{\sigma'}^2}\left(t^2-\frac{\left(m\,{\sigma'}^2+(z-m')\,\sigma^2\right)^2}{\left({\sigma'}^2+\sigma^2\right)^2}+\frac{\left(m^2{\sigma'}^2+(z-m')^2\,\sigma^2\right)\left({\sigma'}^2+\sigma^2\right)}{\left({\sigma'}^2+\sigma^2\right)^2}\right)$$

Ceux qui décrochent sont invités à se rendre illico à la seconde démonstration, les autres, patience, nous arrivons au bout de nos peines. Le développement des quantités mises au même dénominateur conduit en effet à des éliminations de termes :

$$\frac{\left({\sigma'}^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,{\sigma'}^2}\left(t^2+\frac{-2\,m\,(z-m')\,\sigma^2\,{\sigma'}^2+m^2\sigma^2{\sigma'}^2+(z-m')^2\,\sigma^2{\sigma'}^2}{\left({\sigma'}^2+\sigma^2\right)^2}\right)$$

Et en développant à nouveau, une belle simplification !

$$\frac{\left(\sigma'^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,\sigma'^2}t^2+\frac{-2\,m\,(z-m')+m^2+(z-m')^2}{\sigma'^2+\sigma^2}$$

Reste à continuer à simplifier l'expression en z en développant :

$$\frac{\left(\sigma'^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,\sigma'^2}t^2+\frac{-\,2\,m\,z+2\,m\,m'+m^2+z^2-2\,m'z+m'^2}{\sigma'^2+\sigma^2}$$

$$\frac{\left(\sigma'^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,\sigma'^2}t^2+\frac{z^2-2\,(m+m')\,z+m^2+2\,m\,m'+m'^2}{\sigma'^2+\sigma^2}$$

Et là miracle, ça grouille d'identités remarquables !

Et d'une !

$$\frac{\left(\sigma'^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,\sigma'^2}t^2+\frac{z^2-2\,(m+m')\,z+(m+m')^2}{\sigma'^2+\sigma^2}$$

Et de deux !

$$\frac{\left(\sigma'^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,\sigma'^2}t^2+\frac{\left(z-(m+m')\right)^2}{\sigma'^2+\sigma^2}$$

Avouez qu'il ne reste pas grand-chose de l'affreuse expression initiale. C'est que le grand horloger a bien travaillé !

Remettons alors cela dans notre contexte intégral de départ :

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\,\pi\,\sigma\,\sigma'}\int_{t=-\infty}^{t=+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\sigma'^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,\sigma'^2}t^2+\frac{\left(z-(m+m')\right)^2}{\sigma'^2+\sigma^2}\right]}dx$$

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\,\pi\,\sigma\,\sigma'}e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(z-(m+m')\right)^2}{\sigma'^2+\sigma^2}}\int_{t=-\infty}^{t=+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\sigma'^2+\sigma^2\right)}{\sigma^2\,\sigma'^2}t^2\right]}dx$$

Posons alors :

$$\sigma''=\sqrt{\sigma'^2+\sigma^2}$$

Alors :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma\,\sigma'}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-(m+m')}{\sigma''}\right)^2} \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma''^2}{\sigma^2\,\sigma'^2}t^2\right]}\, dt$$

Faisons encore le changement de variable :

$$u = \frac{\sigma''}{\sigma\,\sigma'\sqrt{2}}t$$

soit :

$$dt = \frac{\sigma\,\sigma'\sqrt{2}}{\sigma''}du$$

alors :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma\,\sigma'}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-(m+m')}{\sigma''}\right)^2}\, \frac{\sigma\,\sigma'\sqrt{2}}{\sigma''} \int_{u=-\infty}^{u=+\infty} e^{-u^2}\, du$$

Rappelons que :

$$\int_{u=-\infty}^{u=+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$$

Nous en déduisons :

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{1}{\sigma''\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-(m+m')}{\sigma''}\right)^2}}$$

Ouf ! Vous pouvez vous éponger le front et essorer vos neurones, c'est fini. Alors, vous reconnaissez la fonction de densité d'une loi normale d'espérance $m + m'$ et d'écart type σ'' et vous vous dites, on ne me le refera plus ce coup là, je suis bon pour deux jours de migraine.

Eh bien non ! Car en maths, il y a toujours des astuces pour éviter les calculs fastidieux qui valaient à leurs auteurs le surnom de taupin la brute, à l'époque glorieuse des classes préparatoires, où l'enseignement tenait encore debout avec des professeurs qui n'avaient pas froid aux yeux quand il s'agissait de démontrer (bon voyez cela comme de la mauvaise humeur, vous aussi ils vous arrivent d'être grognon, non ?)

Deuxième démonstration du théorème :

L'astuce pour simplifier la démarche consiste à traiter le cas particulier où les deux variables aléatoires ont une espérance nulle et l'une d'elle, Y par exemple, un écart type de 1.

Le procédé est alors identique au précédent mais avec un volume de calculs bien moindre. Il suffit de remplacer m et m' par 0 et σ' par 1.

Nous avons alors :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-x}{1}\right)^2}\,dx$$

Il suffit alors de factoriser l'expression

$$\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 + (x-z)^2$$

$$= \frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{\sigma^2(x-z)^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{x^2 + \sigma^2(x^2 - 2\,x\,z + z^2)}{\sigma^2}$$

$$= \frac{(1+\sigma^2)x^2 - 2\,\sigma^2 z\,x + \sigma^2\,z^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{(1+\sigma^2)}{\sigma^2}\left(x^2 - 2\,\frac{\sigma^2 z}{1+\sigma^2}\,x + \frac{\sigma^2\,z^2}{1+\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{(1+\sigma^2)}{\sigma^2}\left(\left(x - \frac{\sigma^2 z}{1+\sigma^2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma^2 z}{1+\sigma^2}\right)^2 + \frac{\sigma^2\,z^2}{1+\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{(1+\sigma^2)}{\sigma^2}\left(t^2 + \frac{\sigma^2\,z^2(1+\sigma^2) - \sigma^4 z^2}{(1+\sigma^2)^2}\right)$$

$$= \frac{(1+\sigma^2)}{\sigma^2}\left(t^2 + \frac{\sigma^2\,z^2}{(1+\sigma^2)^2}\right)$$

$$= \frac{(1+\sigma^2)}{\sigma^2}t^2 + \frac{z^2}{1+\sigma^2}$$

Ainsi :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma} \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\sigma^2)}{\sigma^2}t^2 + \frac{z^2}{1+\sigma^2}\right]}\,dx$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right)^2} \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\sigma^2)}{\sigma^2}t^2\right]}\,dx$$

Là encore on pose :

$$\sigma'' = \sqrt{1+\sigma^2}$$

Et on fait un changement de variable dans l'intégrale :

$$u = \frac{\sigma''}{\sigma\,\sqrt{2}}t$$

soit :

$$dt = \frac{\sigma\,\sqrt{2}}{\sigma''}du$$

il vient alors :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma''}\right)^2}\,\frac{\sigma\,\sqrt{2}}{\sigma''}\,\sqrt{\pi}$$

Ce qui après simplification, donne le résultat cherché :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma''}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma''}\right)^2}$$

Reste alors à étendre ce résultat au cas général. Pour cela, il suffit de considérer les variables X' et Y' définies comme suit :

$$X' = \frac{X-m}{\sigma'}$$

$$Y' = \frac{Y-m'}{\sigma'}$$

X' et Y' étant des fonctions affines de variables suivant une loi normale, elles suivent également une loi normale (voir annexe de la démonstration plus loin). D'autre part, leur espérance est nulle et l'écart type de Y' est 1. Et elles sont également indépendantes.

D'après ce que nous venons de voir, la variable somme $Z' = X' + Y'$ suit également une loi normale.

Or la variable $Z = X + Y$ s'exprime par une relation affine en fonction de Z'. En effet :

$$Z = X + Y = \sigma' X' + m + \sigma' Y' + m' = \sigma'(X' + Y') + m + m'$$

Soit :

$$Z = \sigma' Z' + (m + m')$$

On en déduit (voir propriété dans l'annexe qui suit) que Z suit une loi normale et on a de plus :

$$E(Z) = E(X) + E(Y) = m + m'$$

$$V(Z) = V(X) + V(Y) = \sigma^2 + \sigma'^2$$

Ce qui en donne les paramètres caractéristiques

<u>Annexe</u> :

Revenons sur une propriété que nous avons mentionné et que nous allons démontrer ici :

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m;\ \sigma^2)$ et $Y = a\,X + b$ (a non nul) est une fonction affine de X, alors Y suit une loi normale $\mathcal{N}(a\,m + b;\ a^2\,\sigma^2)$.

Voici la preuve :

Partons de la fonction de répartition de Y :

$$F_Y(y) = P(Y < y)$$

$$F_Y(y) = P(a\,X + b < y)$$

A ce stade, nous devons tenir compte du signe de a. Commençons par traiter le cas : $a > 0$

$$F_Y(y) = P\left(X < \frac{y-b}{a}\right)$$

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Dérivons cette relation pour faire apparaître les densités :

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{a}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-b}{a}-m}{\sigma}\right)^2}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{a\,\sigma\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(a\,m+b)}{a\,\sigma}\right)^2}$$

La densité de Y est celle d'une loi normale d'espérance ($a\ m + b$) et d'écart type $a\ \sigma$ ce qui prouve le résultat.

Traitons alors le cas où : $a < 0$:

$$F_Y(y) = P\left(\ X > \frac{y-b}{a}\right)$$

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{-1}{a}\,f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Finalement, on aboutit

$$f_Y(y) = \frac{1}{-a\,\sigma\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(a\,m+b)}{-a\,\sigma}\right)^2}$$

Ou encore :

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|\,\sigma\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(a\,m+b)}{|a|\,\sigma}\right)^2}$$

Dans les deux cas, Y suit une loi normale d'espérance ($a\ m + b$) et d'écart type $|a|\ \sigma$, donc de variance $a^2\ \sigma^2$.