Les notations indicées et les notations sigma

I Notations indicées et notation sigma

Considérons la somme suivante, déjà rencontrée au chapitre sur le raisonnement par récurrence dans le fichier sur le langage mathématique :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

Cette somme dépend d'une variable entière n supérieure ou égale à 1. Il est intéressant d'utiliser une notation indicée pour la désigner :

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

Ainsi :

$S_1 = 1^2 = 1$

$S_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$

Etc

Nous pouvons alors simplifier l'écriture en considérant que les entiers consécutifs $1, 2, \ldots, n$ apparaissant dans S_n sont les différentes valeurs prises par une variable k dite muette. On écrit alors :

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2}$$

faisant ainsi apparaître le symbole sigma Σ qui est le S grec majuscule, S pour somme.

De façon générale, une notation sigma à une variable se présente sous la forme :

$$\sum_{k=p}^{m} U_k$$

où m et p sont deux entiers (généralement naturels) avec $p \leq m$ et U_k une suite de nombres (réels ou complexes) ou bien de vecteurs ou encore de matrices, ou même de fonctions.

Exemple : mise en notation sigma de sommes

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\sum_{k=2}^{5}\frac{1}{k}$$

$$f(1)+\frac{f(2)}{2}+\frac{f(3)}{3}+\frac{f(4)}{4}+\frac{f(5)}{5}+\frac{f(6)}{6}=\sum_{k=1}^{6}\frac{f(k)}{k}$$

II Propriétés des notations sigma

1) Somme

$$\boxed{\sum_{k=p}^{m}(U_k+V_k)=\sum_{k=p}^{m}U_k+\sum_{k=p}^{m}V_k}$$

Preuve :

$$\sum_{k=p}^{m}(U_k+V_k)=\left(U_p+V_p\right)+\left(U_{p+1}+V_{p+1}\right)+\cdots+(U_m+V_m)$$

$$=\left(U_p+U_{p+1}+\cdots+U_m\right)+\left(V_p+V_{p+1}+\cdots+V_m\right)$$

$$=\sum_{k=p}^{m}U_k+\sum_{k=p}^{m}V_k$$

A noter qu’il ne s’agit que de réorganiser la somme.

2) **Produit par une constante**

$$\boxed{\sum_{k=p}^{m} (c\,U_k) = c\sum_{k=p}^{m} U_k}$$

Preuve :

$$\sum_{k=p}^{m} (c\,U_k) = c\,U_p + c\,U_{p+1} + \cdots + c\,U_m$$

$$= c\left(U_p + U_{p+1} + \cdots + U_m\right)$$

$$= c\sum_{k=p}^{m} U_k$$

Noter qu'il s'agit d'une factorisation.

3) **Produit**

Attention !!! Les deus expressions suivantes sont généralement différentes :

$$\sum_{k=p}^{m} (U_k V_k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{m} U_k \sum_{k=p}^{m} V_k$$

Plus précisément :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{m} U_k \sum_{k=p}^{m} V_k = \sum_{\substack{(k,q) \\ \begin{cases} p\le k\le m \\ p\le q\le m \end{cases}}} \left(U_k V_q\right)}$$

Preuve :

Un tableau de multiplication suffit à s'en convaincre

$\times$	V_p	V_{p+1}	…	V_m
U_p	$U_p\ V_p$	$U_p\ V_{p+1}$	…	$U_p\ V_m$
U_{p+1}	$U_{p+1}\ V_p$	$U_{p+1}\ V_{p+1}$	…	$U_{p+1}\ V_m$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
U_m	$U_m\ V_p$	$U_m\ V_{p+1}$	…	$U_m\ V_m$

A noter :

$$\sum_{k=p}^{m}(U_k V_k) = (U_p\ V_p) + (U_{p+1}\ V_{p+1}) + \cdots + (U_m\ V_m)$$

Cette somme est constituée des termes diagonaux du tableau

III Changement d'indice dans les sommes

Soit à calculer la somme :

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2$$

Cette somme est la somme de carrés d'entiers consécutifs. Elle rappelle donc celle déjà obtenue :

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N\,(N+1)(2\,N+1)}{6}$$

Faisons un changement d'indice dans la première somme. Nous pouvons opérer pour cela de deux façons :

<u>Première façon</u> :

Elle consiste à poser : $j = k + 1$ et à noter que j varie de 1 en 1 lorsque k varie de 1 en 1, et qu'il varie de la valeur 2 à la valeur $n + 1$. Ainsi :

$$\Sigma_n = \sum_{j=2}^{n+1} j^2$$

Puisque la variable j est muette, on peut alors la changer à nouveau par la variable k. Ainsi :

$$\Sigma_n = \sum_{k=2}^{n+1} k^2$$

Afin de mieux rapprocher Σ_n de S_N, nous pouvons écrire :

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 - 1^2$$

Soit :

$$\Sigma_n = S_{n+1} - 1$$

Finalement :

$$\boxed{\Sigma_n = \frac{(n+1)\;(n+2)(2\,n+3)}{6} - 1}$$

Deuxième façon :

Cette façon de procéder a notre préférence. Elle consiste à substituer dans l'écriture de Σ_n l'expression $(k-1)$ partout où apparaît la variable k. Ainsi :

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k-1=1}^{k-1=n}(k-1+1)^2 = \sum_{k=2}^{n+1}k^2$$

Cette méthode présente l'avantage de conserver la même notation de variable muette sans passer par une variable j intermédiaire. Elle permet donc de faire les changements d'indice de manière mentale.

L'exemple des suites télescopiques va montrer cet avantage.

IV Sommes télescopiques

Une somme télescopique est une somme de la forme :

$$S = \sum_{k=p}^{m}(U_{k+1} - U_k)$$

Nous allons montrer que ce genre de somme a une expression simple. En effet, commençons par distribuer le sigma :

$$S = \sum_{k=p}^{m}U_{k+1} - \sum_{k=p}^{m}U_k$$

Puis faisons un changement d'indice dans la première somme :

$$S = \sum_{k=p+1}^{m+1}U_k - \sum_{k=p}^{m}U_k$$

Faisons apparaître une somme commune aux deux termes :

$$S = \left(\sum_{k=p+1}^{m} U_k + U_{m+1} \right) - \left(U_p + \sum_{k=p+1}^{m} U_k \right)$$

On en déduit :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{m} (U_{k+1} - U_k) = U_{m+1} - U_p}$$

Notons qu'en prenant l'opposé de cette relation, nous avons :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{m} (U_k - U_{k+1}) = U_p - U_{m+1}}$$

Voici un exemple d'application de ce procédé :

Soit à simplifier la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Notons d'abord une décomposition en éléments simples du terme général de la somme par le procédé rapide suivant :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{1+k}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Ainsi :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

S_n est donc une somme télescopique et ainsi :

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}}$$

Notons maintenant que :

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2+k-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2+k}{k(k+1)(k+2)} - \frac{k}{k(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

On en déduit une nouvelle somme télescopique :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}}$$

Généralisons alors, en notant que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{m}{k(k+1)\dots(k+m)} = \frac{m+k-k}{k(k+1)\dots(k+m)} = \frac{m+k}{k(k+1)\dots(k+m)} - \frac{k}{k(k+1)\dots(k+m)}$$
$$= \frac{1}{k(k+1)\dots(k+m-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+m)}$$

On en déduit que la somme suivante est télescopique

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{m}{k(k+1)\dots(k+m)} = \frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}}$$