Sommes de séries remarquables

I Somme de l'inverse des carrés des entiers consécutifs

Soit à déterminer :

$$\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k^2}}$$

Nous allons présenter une méthode ne faisant pas appel à la théorie des séries de Fourier, qui de toute façon fait appel au même principe, utiliser une somme trigonométrique remarquable, mais est bien plus ardue à justifier.

Etape 1 : Expression intégrale

Notons d'abord qu'une primitive de la fonction $cos\ (k\ t)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ est la fonction :

$$\frac{sin(k\ t)}{k}$$

Elle fait donc apparaître l'inverse de k. Pour faire apparaître l'inverse du carré de k, il faut donc intégrer deux fois, ce qui se produit dans l'intégrale du produit d'un polynôme du second degré par $cos\ (k\ t)$.

Ceci amène à chercher deux réels a et b tels que :

$$\int_0^{\pi} (a\ t + b\ t^2)\ cos(k\ t)\ dt = \frac{1}{k^2}$$

Une intégration par partie donne, en posant classiquement :

$$u(t) = a\ t + b\ t^2\ \ ,\ \ v'(t) = cos(k\ t)$$

$$u'(t) = a + 2\ b\ t\ \ ,\ \ v(t) = \frac{sin(k\ t)}{k}$$

$$\int_0^\pi (a\,t + b\,t^2)\,cos(k\,t)\,dt = \left[(a\,t + b\,t^2)\ \frac{sin(k\,t)}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (a + 2\,b\,t)\frac{sin(k\,t)}{k}\ dt$$

$$= \int_0^\pi (-a - 2\,b\,t)\frac{sin(k\,t)}{k}\ dt$$

Une seconde intégration par partie donne, en posant :

$$u(t) = -a - 2\,b\,t\ \ ,\ \ v'(t) = \frac{sin(k\,t)}{k}$$

$$u'(t) = -2\,b\ \ ,\ \ v(t) = -\frac{cos(k\,t)}{k^2}$$

$$\int_0^\pi (-a - 2\,b\,t)\frac{sin(k\,t)}{k}\ dt = \left[(a + 2\,b\,t)\ \frac{cos(k\,t)}{k^2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2\,b\frac{cos(k\,t)}{k^2}\ dt$$

$$= \frac{(a + 2\,b\,\pi)\ \times (-1)^k - a}{k^2} + 2\ \ b\ \left[\frac{sin(k\,t)}{k^3}\right]_0^\pi$$

Finalement :

$$\int_0^\pi (a\,t + b\,t^2)\,cos(k\,t)\,dt = \frac{(a + 2\,b\,\pi)\ \times (-1)^k - a}{k^2}$$

Choisissons alors, pour répondre à notre question, a et b tels que :

$$\begin{cases} a + 2\,b\,\pi = 0 \\ -a = 1 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} b = \dfrac{1}{2\,\pi} \\ a = -1 \end{cases}$$

Nous avons alors, pour tout entier naturel non nul k :

$$\boxed{\boldsymbol{\int_0^\pi \left(-\,t + \frac{1}{2\,\pi}\ t^2\right) cos(k\,t)\,dt = \frac{1}{k^2}}}$$

Ainsi par sommation, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k^2}} = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} \left(-\boldsymbol{t} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\,\boldsymbol{\pi}}\, \boldsymbol{t^2} \right) \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{cos(k\,t)\,dt}}$$

Etape 2 : <u>Formule trigonométrique remarquable</u> :

Dans le fichier sur les applications des nombres complexes, nous avons établi une formule remarquable pour tout $t \neq 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\mathbf{1} + \boldsymbol{cos(t)} + \boldsymbol{cos(2\,t)} + \cdots + \boldsymbol{cos(n\,t)} = \frac{\boldsymbol{sin}\left(\frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\,\boldsymbol{t}}{\mathbf{2}}\right)\,\boldsymbol{cos}\left(\frac{\boldsymbol{n\,t}}{\mathbf{2}}\right)}{\boldsymbol{sin}\left(\frac{\boldsymbol{t}}{\mathbf{2}}\right)}}$$

Et nous avons montré dans le fichier des intégrales impropres remarquables, que la validité de cette formule pouvait être prolongée par continuité aux $t = 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Nous avons alors :

$$\sum_{k=1}^{n} cos(k\,t) = \frac{sin\left(\frac{(n+1)\,t}{2}\right)\,cos\left(\frac{n\,t}{2}\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 = \frac{\frac{1}{2}\left(sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\,t\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\,t\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \left(-t + \frac{1}{2\,\pi}\,t^2\right) \left(\frac{sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\,t\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1\right) dt$$

Soit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \left(\frac{-t + \frac{1}{2\,\pi}\,t^2}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) sin\left((2\,n+1)\,\frac{t}{2}\right)\,dt - \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(-t + \frac{1}{2\,\pi}\,t^2\right)\,dt$$

Posons :

$$f(t) = \frac{-\,t + \frac{1}{2\,\pi}\,t^2}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

La première intégrale est une suite qui s'écrit :

$$U_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)\ sin\left((2\,n+1)\ \frac{t}{2}\right)\ dt$$

et, par changement de variable :

$$t = 2\,x$$

$$dt = 2\,dx$$

$$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\,x)\ sin\big((2\,n+1)\,x\big)\ dx$$

f étant prolongeable par continuité sur $[0\,;\pi]$, la fonction $f(2\,x)$ est continue donc intégrable au sens de Riemann sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Nous avons vu, dans le préliminaire du fichier sur les intégrales impropres remarquables, que cette suite U avait pour limite 0

Quant à la seconde intégrale, elle se calcule :

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(-\,t + \frac{1}{2\,\pi}\,t^2\right)\ dt = -\frac{1}{2}\left[-\,\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\,\pi}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{6}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}}$$

II Somme de l'inverse alternée des carrés des entiers consécutifs

Soit à déterminer :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

Etape 1 :

La démarche est analogue à la précédente. Il suffit de noter, par double intégration par partie, que :

$$\boxed{\int_0^{\pi} t^2 \cos(k\,t)\,dt = \frac{2\,\pi\,(-1)^k}{k^2}}$$

soit encore :

Ainsi par sommation, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{\pi} t^2 \sum_{k=1}^{n} \cos(k\,t)\,dt}$$

Etape 2 : Formule trigonométrique remarquable :

On procède comme précédemment et on aboutit à :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{2\,\pi} \times \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t^2 \left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\,t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 \right) dt$$

soit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{4\,\pi}\int_0^{\pi} \frac{t^2}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}\ sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\ t\right)\ dt - \frac{1}{4\,\pi}\int_0^{\pi} t^2\ dt$$

Soit alors la fonction f définie par :

$$f(t) = \frac{t^2}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

f étant prolongeable par continuité sur $[0\,;\pi]$, nous avons, comme vu précédemment :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} \frac{t^2}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}\ sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\ t\right)\ dt = 0$$

Reste à calculer :

$$-\frac{1}{4\,\pi}\int_0^{\pi} t^2\ dt = -\frac{1}{4\,\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi^2}{12}$$

donc, par passage à la limite :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

On en déduit :

$$\boxed{\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{+\infty} \frac{(\mathbf{-1})^{\boldsymbol{k-1}}}{\boldsymbol{k^2}} = \frac{\boldsymbol{\pi^2}}{\mathbf{12}}}$$