Séries numériques

I Définition

Soit $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Une série numérique est une suite numérique $\boldsymbol{S}$ ayant une définition de la forme :

$$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} :\ \boldsymbol{S_n} = \sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{U_k}$$

$\boldsymbol{U}$ est alors qualifiée de suite associée à la série $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{U_n}$ de terme général de cette série, et $\boldsymbol{S_n}$ de somme partielle de rang $\boldsymbol{n}$

Si $\boldsymbol{S}$ admet une limite en $+\infty$, on note :

$$\lim_{\boldsymbol{n\to+\infty}} \boldsymbol{S_n} = \sum_{\boldsymbol{k=0}}^{+\infty} \boldsymbol{U_k}$$

On appelle alors reste de rang $\boldsymbol{n}$ la suite :

$$\boldsymbol{R_n(S)} = \left(\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{+\infty} \boldsymbol{U_k}\right) - \boldsymbol{S_n} = \sum_{\boldsymbol{k=n+1}}^{+\infty} \boldsymbol{U_k}$$

Exemples :

1)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

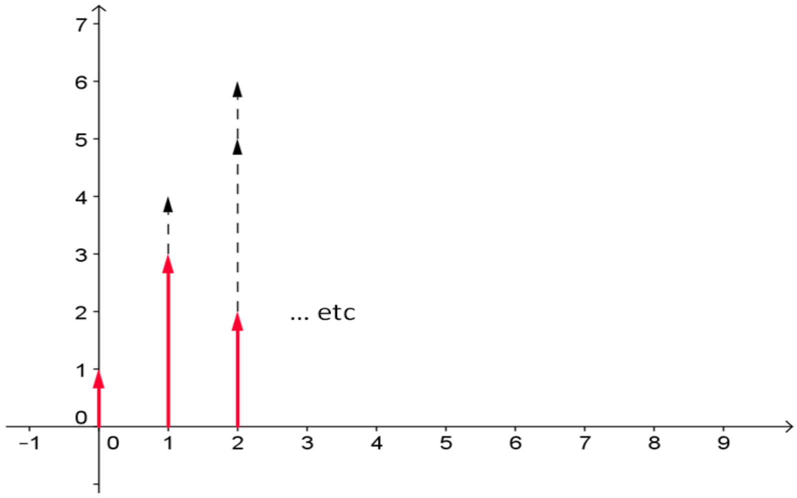
La suite associée est la suite : $U_n = n^2$

2)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

La suite associée est la suite : $U_n = \frac{1}{n^2}$ si $n \neq 0$ et $U_0 = 0$

On peut se représenter une série graphiquement comme un « empilement » des valeurs de la suite associée.



Lorsque la suite associée à une série n'est définie qu'à partir d'un certain rang non nul, on la complètera par des termes nuls jusqu'au rang 0.

II Condition nécessaire de convergence

Soit $U \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et S la série associée alors :

$$\boxed{\exists L \in \mathbb{R} : \lim_{n \to +\infty} S_n = L \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = 0}$$

Preuve :

Il suffit de noter que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$

Et que si :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = L$$

alors :

$$\lim_{n \to +\infty} S_{n-1} = L$$

donc :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

III Critère de convergence de Cauchy

Soit $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\boldsymbol{S}$ la série associée alors :

$$\exists\, \boldsymbol{L} \in \mathbb{R} : \lim_{\boldsymbol{n}\to+\infty} \boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{L}$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\, \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \ \exists\, \boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N} : \forall\, (\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}) \in \mathbb{N}^2 : \ \boldsymbol{n} > \boldsymbol{n_0} \Rightarrow \left| \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}} \boldsymbol{U_k} \right| < \varepsilon$$

<u>Preuve</u> :

L'équivalence ne fait que traduire le critère de convergence de Cauchy pour la suite S. En effet, pour $n > 0$:

$$\sum_{k=n}^{n+p} U_k = S_{n+p} - S_{n-1}$$

III Convergence absolue

Soit $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\boldsymbol{S}$ la série associée, notons $\boldsymbol{T}$ la série associée à la suite des valeurs absolues de $\boldsymbol{U}$, à savoir :

$$\boldsymbol{S_n} = \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{U_k}$$

$$\boldsymbol{T_n} = \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{U_k}|$$

alors :

$$\exists\, \boldsymbol{L} \in \mathbb{R} : \lim_{\boldsymbol{n}\to+\infty} \boldsymbol{T_n} = \boldsymbol{L} \ \Rightarrow \ \exists\, \boldsymbol{L'} \in \mathbb{R} : \lim_{\boldsymbol{n}\to+\infty} \boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{L'}$$

On dit alors de la série $\boldsymbol{S}$ qu'elle est absolument convergente

La réciproque est fausse : il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes, comme par exemple :

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k}}$$

La preuve de ce fait sera apportée plus loin avec l'étude des séries alternées

Preuve :

Supposons T convergente et montrons que S l'est par le critère de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, (n,p) \in \mathbb{N}^2 : \; n > n_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} |U_k|\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} U_k\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |U_k| < \varepsilon$$

IV Séries à termes positifs ou nuls

1) Critère de convergence

Soit $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} : \; \boldsymbol{U_n \geq 0}$ et $\boldsymbol{S}$ la série associée, à savoir :

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k}$$

alors

$\boldsymbol{S}$ est une suite croissante et donc :
$\exists\, \boldsymbol{L} \in \mathbb{R} : \; \lim\limits_{\boldsymbol{n \to +\infty}} \boldsymbol{S_n = L} \;\; \Leftrightarrow \;\; \exists\, \boldsymbol{M} \in \mathbb{R} : \; \forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} : \;\; \boldsymbol{S_n \leq M}$

Autrement dit :

La série $\boldsymbol{S}$ converge si et seulement si elle est majorée

Preuve :

Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{n+1} - S_n = U_{n+1} \geq 0$$

donc S est croissante et pour qu'elle converge, il faut et il suffit qu'elle soit majorée.

2) **Critère de comparaison** :

Soit $(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ telle que : $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} :\ \boldsymbol{U_n} \leq \boldsymbol{V_n}$ et $\boldsymbol{S},\boldsymbol{T}$ les séries respectives associées, soit :

$$\boldsymbol{S_n} = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{U_k}$$

$$\boldsymbol{T_n} = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{V_k}$$

alors

$$\boxed{\begin{array}{c} \exists\, \boldsymbol{L} \in \mathbb{R} :\ \lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{T_n} = \boldsymbol{L} \ \Rightarrow\ \exists\, \boldsymbol{L'} \in \mathbb{R} :\ \lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{L'} \ \text{ et } \ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \boldsymbol{U_k} \leq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \boldsymbol{V_k} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{S_n} = +\infty \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{T_n} = +\infty \end{array}}$$

<u>Preuve</u> :

Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n \leq T_n$$

Donc, si T converge vers une limite L, alors, compte tenu de sa monotonie, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n \leq L$$

La suite S est donc majorée et converge ainsi vers une limite L'. Par passage à la limite, on en déduit :

$$L' \leq L$$

soit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} U_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} V_k$$

Si maintenant S tend vers $+\infty$**,** le théorème du gendarme minorant montre que T tend vers $+\infty$

3) <u>Règle d'équivalence</u>

Soit $(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ tel que : : $\boldsymbol{U_n} \sim \boldsymbol{V_n}$ et $\boldsymbol{V} > 0$ à partir d'un certain rang, et soient $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$ les séries respectives associées, à savoir :

$$\boldsymbol{S_n} = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{U_k}$$

$$\boldsymbol{T_n} = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{V_k}$$

alors

$$\boxed{\begin{gathered} \exists\, \boldsymbol{L} \in \mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{T_n} = \boldsymbol{L} \iff \exists\, \boldsymbol{L'} \in \mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{L'} \\ \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{S_n} = +\infty \iff : \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{T_n} = +\infty \end{gathered}}$$

On dit des séries qu'elles sont de même nature pour la limite

<u>Preuve</u> :

Supposons $V > 0$ à partir du rang n_1

$U_n \sim V_n$ se traduit par l'existence d'une suite W_n tendant vers 1 telle que :

$$U_n = V_n\, W_n$$

Alors pour $\varepsilon = 1/2$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{2} < W_n < \frac{3}{2}$$

donc, en notant $n_2 = \max(n_0\,, n_1)$:

$$n > n_2 \Rightarrow \frac{1}{2}\, V_n < V_n\, W_n < \frac{3}{2}\, V_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\, V_n < U_n < \frac{3}{2}\, V_n$$

On a donc $V > 0$ et $U > 0$ à partir du rang n_2.

Considérons la suite U' dont les termes sont nuls jusqu'au rang n_2 et égaux à ceux de U après ce rang, et désignons par S' la série associée

Considérons de même la suite V' dont les termes sont nuls jusqu'au rang n_2 et égaux à ceux de V après ce rang, et désignons par T' la série associée.

Nous avons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2} V'_n \leq U'_n \leq \frac{3}{2} V'_n$$

Donc :

$$\frac{1}{2} T'_n \leq S'_n \leq \frac{3}{2} T'_n$$

Le théorème de comparaison, montre alors que si T' converge, alors S' converge et réciproquement, et si T' tend vers $+\infty$ alors S' tend vers $+\infty$, et réciproquement.

Or T' et T sont de façon triviale de même nature pour la limite, tout comme S' et S. Ainsi T et S sont de même nature pour la limite.

4) <u>Comparaison série-intégrale</u>

Soit un réel $a \geq 0$ et f une fonction décroissante de $[a; +\infty[$ dans $[0; +\infty[$ intégrable sur tout intervalle fermé borné de $[a; +\infty[$ et telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Soit g la fonction définie sur $[a; +\infty[$ par :

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

et S la série dont le terme général U_n vaut 0 si $n < a$ et $f(n)$ si $n \geq a$ soit, en notant n_0 le plus petit entier naturel de $[a; +\infty[$:

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \quad si\ \ n \geq n_0\ , 0\ sinon$$

alors :

$$\exists\, L \in \mathbb{R} : \lim_{x \to +\infty} g(x) = L \iff \exists\, L' \in \mathbb{R} : \lim_{n \to +\infty} S_n = L'$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \;\Leftrightarrow : \lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$$

On dira que la série et l'intégrale sont de même nature pour la limite.

Dans le cas où S est convergente, on a, pour son reste de rang $n \geq a$:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n(S) \leq \int_{n}^{+\infty} f(t)dt$$

Dans le cas où S tend vers $+\infty$, on a :

$$\exists\, L \in \mathbb{R} : \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n_0}^{n} f(k) - \int_{n_0}^{n} f(t)dt = L$$

et en conséquence :

$$\sum_{k=n_0}^{n} f(k) \sim \int_{n_0}^{n} f(t)dt$$

Preuve :

Pour tout entier naturel k de $[a; +\infty[$ on a :

$$f(k+1) \leq \int_{k}^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$$

donc :

$$\sum_{k=n_0}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=n_0}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$$

soit :

$$\sum_{k=n_0+1}^{n+1} f(k) \leq \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$$

ou encore :

$$S_n + f(n+1) - f(n_0) \leq g(n+1) \leq S_n$$

Considérons en premier l'inégalité :

$$S_n \leq g(n+1) - f(n+1) + f(n_0)$$

et supposons que g converge en $+\infty$. La suite $g(n+1) - f(n+1) + f(n_0)$ converge donc et par comparaison, on en déduit que la série S converge.

Considérons en second l'inégalité :

$$S_n + f(n+1) - f(n_0) \leq g(n+1)$$

et supposons que S tende vers $+\infty$, alors la suite $S_n + f(n+1) - f(n_0)$ tend également vers $+\infty$ et, par théorème du gendarme minorant, la suite $g(n+1)$ tend vers $+\infty$. Donc g est croissante sur $[a; +\infty[$ et ne peut pas tendre vers une limite finie. Elle tend donc vers $+\infty$

Considérons en troisième l'inégalité :

$$g(n+1) \leq S_n$$

et supposons que g tende vers $+\infty$ en $+\infty$. Alors, la suite $g(n+1)$ tend vers $+\infty$ et par théorème du gendarme minorant, la série S tend vers $+\infty$.

Si on suppose que S tende vers une limite finie L, alors on a :

$$g(n+1) \leq S_n \leq L$$

g qui est croissante sur $[a; +\infty[$ ne peut alors pas tendre vers $+\infty$. Elle tend donc vers une limite finie.

Voyons alors le reste de rang n lorsque S est convergente.

Pour tout entier naturel k de $[a; +\infty[$ on a :

$$\int_{k+1}^{k+2} f(t)dt \leq f(k+1) \leq \int_{k}^{k+1} f(t)dt$$

Donc pour tous entiers naturels n de $[a; +\infty[$ et $N > n$

$$\sum_{k=n}^{N} \int_{k+1}^{k+2} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^{N} f(k+1) \leq \sum_{k=n}^{N} \int_{k}^{k+1} f(t)dt$$

Soit :

$$\int_{n+1}^{N+2} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{N+1} f(k) \leq \int_{n}^{N+1} f(t)dt$$

En faisant tendre N vers l'infini pour n fixé, on en déduit :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n(S) \leq \int_{n}^{+\infty} f(t)dt$$

Voyons finalement la dernière propriété lorsque S tend vers $+\infty$

Posons pour $n \geq n_0$:

$$U_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) - \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt$$

$$= \sum_{k=n_0}^{n} f(k) - \sum_{k=n_0}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)dt$$

$$= \sum_{k=n_0}^{n} \int_{k}^{k+1} \big(f(k) - f(t)\big)dt$$

Nous allons montrer que la suite U vérifie le critère de Cauchy pour la convergence.

Soit un entier naturel m de $[a; +\infty[$ et un entier naturel $p > 0$ alors :

$$U_{m+p} - U_m = \sum_{k=m+1}^{m+p} \int_{k}^{k+1} \big(f(k) - f(t)\big)dt$$

Or sur $[k; k+1]$:

$$0 \leq f(k) - f(t) \leq f(k) - f(k+1)$$

donc :

$$0 \leq \int_{k}^{k+1} \big(f(k) - f(t)\big)dt \leq f(k) - f(k+1)$$

d'où :

$$0 \leq U_{m+p} - U_m \leq \sum_{k=m+1}^{m+p} \big(f(k) - f(k+1)\big)$$

$$0 \leq U_{m+p} - U_m \leq f(m+1) - f(m+p+1)$$

Traduisons alors le critère de Cauchy pour la suite $f(n)$ qui tend vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$ alors :

$$\forall\, (n,q) \in \mathbb{N}^2 :\ \exists\, n_1 \in \mathbb{N}\ (n_1 > n_0) : n > n_1 \ \Rightarrow\ |f(n+q) - f(n)\,| < \varepsilon$$

Donc

$$m > n_1 \ \Rightarrow m+1 > n_1 \ \ \Rightarrow\ 0 \leq f(m+1) - f(m+1+p) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow\ \left|U_{m+p} - U_m\right| < \varepsilon$$

La suite U vérifie donc le critère de Cauchy. Elle est donc convergente.

Or, pour $n > n_0$:

$$\sum_{k=n_0}^{n} f(k) - \int_{n_0}^{n} f(t)dt = f(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k) - \int_{n_0}^{n} f(t)dt = f(n) + U_{n-1}$$

Cette suite converge donc vers la même limite que U. Notons L cette limite et posons :

$$V_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$$

$$W_n = \int_{n_0}^{n} f(t)dt$$

$$C_n = \frac{V_n - W_n}{W_n}$$

On a alors :

$$V_n = W_n\,(1 + C_n)$$

$$\lim_{n\to+\infty} C_n = 0$$

Donc :

$$V_n \sim C_n$$

5) **Règle de D'Alembert**

Soit S une série de terme général $U_n > 0$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = L$$

alors :

$$\boxed{\begin{gathered} L < 1 \;\Rightarrow\; \exists\, L' \in \mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty} S_n = L' \\ L > 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty \end{gathered}}$$

Dans le cas où $L = 1$, on ne peut pas conclure, comme le montrent les exemples suivants :

$$U_n = n \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 \;\; et \;\; \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

$$U_n = \frac{1}{n^2} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 \;\; et \;\; \exists\, L' \in \mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty} S_n = L'$$

Preuves :

1er cas : $L < 1$:

Pour $\varepsilon = (1 - L)/2$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < \frac{U_{n+1}}{U_n} < L + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} < L + \frac{1-L}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} < \frac{L+1}{2}$$

Posons :

$$q = \frac{L+1}{2}$$

On en déduit, en notant $n_1 = n_0 + 1$:

$$n \geq n_1 \Rightarrow U_{n+1} < q\, U_n$$

donc :

$$U_{n_1+1} < q\, U_{n_1}$$

$$U_{n_1+2} < q\, U_{n_1+1} < q^2\, U_{n_1}$$

$$U_{n_1+3} < q\, U_{n_1+2} < q^3\, U_{n_1}$$

$$\dots$$

$$U_{n_1+k} < q\, U_{n_1+k-1} < q^k\, U_{n_1}$$

Soit en posant $n_1 + k = n$:

$$n \geq n_1 \Rightarrow U_n < \; q^{n-n_1} U_{n_1} \Rightarrow \sum_{k=n_1}^{n} U_k < \sum_{k=1}^{n-n_1} \left(q^k\, U_{n_1}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} U_k < \sum_{k=0}^{n_1-1} U_k + U_{n_1}\, \frac{1 - q^{n-n_1}}{1-q}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} U_k < \sum_{k=0}^{n_1-1} U_k + \frac{1}{1-q}$$

Les sommes partielles de la série S à termes positifs ou nuls sont donc majorées. La série converge

2ème cas : $L > 1$:

On procède de façon analogue à précédemment en notant qu'il existe un réel $q > 1$ tel que :

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Rightarrow U_{n+1} > q\, U_n$$

Et on aboutit à :

$$n \geq n_1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} U_k > \sum_{k=0}^{n_1-1} U_k + U_{n_1}\, \frac{q^{n-n_1} - 1}{q-1}$$

Or puisque $q > 1$ on a :

$$\lim_{n \to +\infty} q^{n-n_1} = +\infty$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n_1-1} U_k + U_{n_1}\,\frac{q^{n-n_1}-1}{q-1}\right) = +\infty$$

Par théorème du gendarme minorant, on en déduit que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$**.**

6) Règle de Cauchy

Soit S une série de terme général $U_n \geq 0$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} (U_n)^{\frac{1}{n}} = L$$

alors :

$$L < 1 \Rightarrow \ \exists\, L' \in \mathbb{R} : \ \lim_{n\to+\infty} S_n = L'$$

$$L > 1 \ ou \ \ L = 1^+ \Rightarrow \ \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

Dans le cas où $L = 1^-$, on ne peut pas conclure

Preuve :

1er cas : $L < 1$:

$$\exists\, q < 1 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow (U_n)^{\frac{1}{n}} < q \ \Rightarrow U_n < q^n$$

Le théorème de comparaison donne alors la conclusion

2ème cas : $L > 1$:

$$\exists\, q > 1 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow (U_n)^{\frac{1}{n}} > q \ \Rightarrow U_n > q^n$$

Le théorème de comparaison donne alors la conclusion

3ème cas : $L = 1^+$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow (U_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1 \Rightarrow U_n \geq 1$$

Le théorème de comparaison donne encore la conclusion

4ème cas : $L = 1^-$:

Prenons deux exemples aux conclusions différentes :

Exemple 1 :

$$U_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Nous avions établi dans le fichier sur les suites numériques :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{e}$$

La suite U ne tend donc pas vers 0. La série associée n'est donc pas convergente.

Exemple 2 :

$$U_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$U_n = e^{n\, ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = e^{n\,\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\sqrt{n} - \frac{1}{2} + o(1)} \sim e^{-\sqrt{n} - \frac{1}{2}}$$

$$n^2\, U_n \sim n^2\, e^{-\sqrt{n} - \frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} n^2\, e^{-\sqrt{n} + \frac{1}{2}} = \lim_{t \to +\infty} t^4\, e^{-t + \frac{1}{2}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^4}{e^t}\, e^{\frac{1}{2}} = 0$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} n^2\, U_n = 0$$

D'après un critère montré ci-après, la série de terme général U_n converge

V Règles "$n^\alpha\, U_n$"

Soit S une série de terme général U_n et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors :

Si :

$$\exists\, L \in \mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty} n^\alpha\, U_n = L \quad et \;\; L \neq 0$$

alors :

$$\exists\, L' \in \mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty} S_n = L' \iff \alpha > 1$$

Preuve :

$$U_n \sim \frac{L}{n^\alpha}$$

Or, La série de terme général $\frac{L}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Si :

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\, U_n = 0 \quad et \;\; \alpha > 1$$

alors :

$$\exists\, L' \in \mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty} S_n = L'$$

Preuve :

Montrons que la série S est absolument convergente.

Pour $\varepsilon = 1$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |n^\alpha\, U_n| < 1$$

$$\Rightarrow |U_n| < \frac{1}{n^\alpha}$$

Or pour $\alpha > 1$ la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge. Le critère de comparaison montre alors que la série de terme général $|U_n|$ converge. La série S est donc absolument convergente.

Si :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\, U_n = +\infty \quad et \;\; \alpha \leq 1$$

alors :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

Preuve :

Pour $A = 1$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow n^{\alpha}\, U_n > 1$$

$$\Rightarrow U_n > \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Or pour $\alpha \leq 1$ la série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha}}$ tend vers $+\infty$. Le critère de comparaison montre alors que la série de S terme général U_n tend vers $+\infty$.

VI Règles de Duhamel pour les séries à termes strictement positifs

Soit $a \in \mathbb{R}$ et S une série de terme général $U_n > 0$ tel que :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

alors

$$a > 1 \;\Rightarrow\; \exists\, L \in \mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty} S_n = L$$

$$a < 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty\ (\text{ou} - \infty)$$

Si $a = 1$ et s'il existe un réel b tel que :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$$

Plus généralement si :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{a}{n} + R_n$$

où la série de terme général R_n est absolument convergente, alors il existe un réel $K > 0$ tel que :

$$U_n \sim \frac{K}{n^a}$$

Preuve :

Etablissons d'abord un préliminaire :

Soient U et V deux suites à termes strictements positifs et S et T leurs séries respectives associées. On suppose qu'à partir d'un certain rang on a :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n}$$

Alors :

Si T converge alors S converge

Si S tend vers $+\infty$ alors T tend vers $+\infty$

Preuve du préliminaire :

Notons n_1 le rang à partir duquel on a :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n}$$

Alors :

$$U_{n_1+1} \leq \frac{V_{n_1+1}}{V_{n_1}} U_{n_1}$$

$$U_{n_1+2} \leq \frac{V_{n_1+2}}{V_{n_1+1}} \; U_{n_1+1} \leq \frac{V_{n_1+2}}{V_{n_1+1}} \; \frac{V_{n_1+1}}{V_{n_1}} \; U_{n_1} \leq \frac{V_{n_1+2}}{V_{n_1}} \;\; U_{n_1}$$

$$U_{n_1+3} \leq \frac{V_{n_1+3}}{V_{n_1+2}} \; U_{n_1+2} \leq \frac{V_{n_1+3}}{V_{n_1+2}} \; \frac{V_{n_1+2}}{V_{n_1}} \; U_{n_1} \leq \frac{V_{n_1+3}}{V_{n_1}} \;\; U_{n_1}$$

$$\ldots$$

$$U_{n_1+k} \leq \frac{V_{n_1+k}}{V_{n_1}} \;\; U_{n_1}$$

Soit en posant $n_1 + k = n$:

$$n \geq n_1 \Rightarrow U_n \leq \frac{V_n}{V_{n_1}} \;\; U_{n_1} \Rightarrow \sum_{k=n_1}^{n} U_k \leq \frac{U_{n_1}}{V_{n_1}} \sum_{k=n_1}^{n} V_k$$

Le théorème de comparaison établit alors les résultats cherchés.

<u>Preuves des règles de Duhamel</u> :

<u>Cas $a > 1$</u>

Nous allons chercher un réel $\beta > 1$ de façon à pouvoir appliquer le préliminaire sous la forme :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{\frac{1}{(n+1)^\beta}}{\frac{1}{n^\beta}}$$

Ce qui revient à obtenir :

$$\frac{(n+1)^\beta \; U_{n+1}}{n^\beta \; U_n} \leq 1$$

Nous allons pour cela effectuer un développement limité en $\frac{1}{n}$ de du membre de gauche et montrer qu'on peut choisir β de telle sorte à ce qu'il tende vers 1 par valeur inférieure.

On a en effet :

$$\frac{(n+1)^\beta \; U_{n+1}}{n^\beta \; U_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta \; \frac{U_{n+1}}{U_n}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\beta \left(1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \left(1 + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{\beta - a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

En prenant alors β tel que : $1 < \beta < a$ on a : $\beta - a < 0$ et donc :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow \frac{(n+1)^\beta\, U_{n+1}}{n^\beta\, U_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{\frac{1}{(n+1)^\beta}}{\frac{1}{n^\beta}}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^\beta}$ converge donc la série de terme général U_n converge.

<u>Cas $a < 1$</u>

on prend β tel que : $a < \beta < 1$ et on a : $\beta - a > 0$ donc :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow \frac{(n+1)^\beta\, U_{n+1}}{n^\beta\, U_n} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \geq \frac{\frac{1}{(n+1)^\beta}}{\frac{1}{n^\beta}}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^\beta}$ tend vers $+\infty$ donc la série de terme général U_n tend vers $+\infty$

<u>Cas $a = 1$</u>

Si :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

alors :

$$\frac{(n+1)\, U_{n+1}}{n\ \, U_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{b-1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Soit en prenant le logarithme népérien :

$$Ln\big((n+1)\,U_{n+1}\big) - Ln(n\ \ U_n) = Ln\left(1 + \frac{b-1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{b-1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}}\left(Ln\big((n+1)\,U_{n+1}\big) - Ln(n\ \ U_n)\right) = 0$$

La série télescopique de terme général $Ln\big((n+1)\,U_{n+1}\big) - Ln(n\ \ U_n)$ converge, donc la suite $Ln(n\ \ U_n)$ converge vers une limite L. On a ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ \ U_n = e^L$$

Donc :

$$U_n \sim \frac{e^L}{n}$$

La série de terme général $\frac{e^L}{n}$ tend vers $+\infty$, donc la série de terme général U_n tend vers $+\infty$

<u>Cas plus général :</u>

$$\frac{(n+1)^a\,U_{n+1}}{n^a\,U_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \left(1 - \frac{a}{n} + R_n\right)$$

$$= \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{a(a-1)}{2\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{a}{n} + R_n\right)$$

$$= 1 + R_n - \frac{a(a+1)}{2\,n^2} + \frac{a}{n}\,R_n + \ \ o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or :

$$\left|\frac{a}{n}\,R_n\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n^2} + {R_n}^2\right)$$

La suite R tendant vers 0 , nous avons, à partir d'un certain rang

$${R_n}^2 \leq |\,R_n|$$

Donc en posant :

$$V_n = R_n - \frac{a(a+1)}{2\,n^2} + \frac{a}{n}\,R_n + \ \ o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$|V_n| \leq |\ R_n| + \frac{|a(a+1)|}{2\ n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n^2} + |\ R_n|\right) + \left|o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|$$

On en déduit par comparaison que la série de terme général V_n est absolument convergente

Or :

$$\frac{(n+1)^a\ U_{n+1}}{n^a\ U_n} = 1 + V_n$$

En prenant le logarithme népérien :

$$Ln((n+1)^a\ U_{n+1}) - Ln(n^a\ U_n) = Ln(1 + V_n) \sim V_n$$

La série de terme général ci-dessus, qui est télescopique, est donc convergente. On en déduit que la suite $Ln(n^a\ U_n)$ tend vers une limite L et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} n^a\ \ U_n = e^L$$

Donc, en posant $K = e^L$:

$$U_n \sim \frac{K}{n^a}$$

VII Règles pour les séries alternées

1) Définition :

Une série S est alternée si son terme général est de la forme $V_n = (-1)^n\ U_n$ où U est une suite à termes positifs ou nuls

2) Règle de convergence et majoration du reste

Soit S une série alternée dont le terme général est de la forme $V_n = (-1)^n\ U_n$ avec U tendant vers 0 en décroissant alors S converge. On a de plus une majoration en valeur absolue du reste de rang n par la valeur absolue du terme de rang $n+1$, à savoir :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} :\ |R_n(S)| \leq |V_{n+1}|$$

Preuve **:**

Première méthode : en utilisant des suites adjacentes.

Considérons les sommes partielles de rand pair et de rang impair et montrons qu'elles forment deux suites adjacentes.

$$S_{2\,n+1} - S_{2\,n} = (-1)^{2\,n+1}\, U_{2\,n+1} = -U_{2\,n+1} \leq 0$$

Donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : S_{2\,n+1} \leq S_{2\,n}$$

Et :

$$\lim_{n\to\infty} S_{2\,n+1} - S_{2\,n} = 0$$

De plus :

$$S_{2\,n+3} - S_{2\,n+1} = (-1)^{2\,n+3}\, U_{2\,n+3} + (-1)^{2\,n+2}\, U_{2\,n+2} = U_{2\,n+2} - U_{2\,n+3} \geq 0$$

Donc $(S_{2\,n+1})$ est croissante.

$$S_{2\,n+2} - S_{2\,n} = (-1)^{2\,n+2}\, U_{2\,n+2} + (-1)^{2\,n+1}\, U_{2\,n+1} = U_{2\,n+2} - U_{2\,n+1} \leq 0$$

Donc $(S_{2\,n})$ est décroissante.

Les suites $(S_{2\,n})$ et $(S_{2\,n+1})$ sont donc adjacentes et ainsi elles convergent vers une même limite L qui vérifie :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : S_{2\,n+1} \leq L \leq S_{2\,n}$$

Donc :

$$|L - S_{2\,n}| \leq |S_{2\,n+1} - S_{2\,n}| = |V_{2\,n+1}|$$

Et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : S_{2\,n+1} \leq S \leq S_{2\,n+2}$$

Donc :

$$|L - S_{2\,n+1}| \leq |S_{2\,n+2} - S_{2\,n+1}| = |V_{2\,n+2}|$$

Ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\ |L - S_n| \leq |V_{n+1}|$$

Soit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\ |R_n(S)| \leq |V_{n+1}|$$

Seconde méthode : à partir d'un préliminaire plus général :

Soit S une série dont le terme général est de la forme $V_n = B_n\, U_n$ avec U tendant vers 0 en décroissant (ou à partir d'un certain rang seulement), et B une suite dont la série associée est bornée, alors S converge.

Preuve du préliminaire :

Notons n_2 le rang à partir duquel la suite U est décroissante.

Notons T la série associée à la suite B, à savoir :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} B_k$$

alors :

$$\exists\, M \in \left]0; +\infty\right[\,:\; \forall\, n \in \mathbb{N} \,:\; |T_n| \leq M$$

et :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^* \;:\;\; B_k = T_k - T_{k-1}$$

donc, pour tous m et p entiers naturels, avec $m > n_2$

$$\sum_{k=m}^{m+p} (B_k\, U_k) = \sum_{k=m}^{m+p} U_k\, (T_k - T_{k-1})$$

$$= \sum_{k=m}^{m+p} (U_k\, T_k) - \sum_{k=m}^{m+p} (U_k\, T_{k-1})$$

$$= \sum_{k=m}^{m+p} (U_k\, T_k) - \sum_{k=m-1}^{m+p-1} (U_{k+1}\, T_k)$$

$$= U_{m+p}\, T_{m+p} - U_m\, T_{m-1} + \sum_{k=m}^{m+p-1} (U_k - U_{k+1})\, T_k$$

et :

$$\left|\sum_{k=m}^{m+p} (B_k\, U_k)\right| \leq \left|U_{m+p}\right| \left|T_{m+p}\right| + |U_m|\, |T_{m-1}| + \sum_{k=m}^{m+p-1} |U_k - U_{k+1}|\, |T_k|$$

$$\leq M\left|U_{m+p}\right| + M\,|U_m| + M\sum_{k=m}^{m+p-1}(U_k - U_{k+1})$$

$$\leq M\left|U_{m+p}\right| + M\,|U_m| + M\left(U_m - U_{m+p}\right)$$

U tendant vers 0, elle vérifie le critère de Cauchy.

Soit donc $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\,(n,q) \in \mathbb{N}^2 \;:\; n > n_0 \;\Rightarrow\; \left|U_{n+q} - U_n\right| < \frac{\varepsilon}{3\,M}$$

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} :\;\; \forall\, n \in \mathbb{N} : n > n_1 \;\Rightarrow\; |U_n| \;< \frac{\varepsilon}{3\,M}$$

En notant : $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2) + 1$ on a pour tout m et p entiers naturels :

$$m > n_3 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} m > n_1 \\ m + p > n_1 \\ m > n_0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left|\sum_{k=m}^{m+p}(B_k\,U_k)\right| \;< \varepsilon$$

La série S vérifie donc le critère de Cauchy pour la convergence. Elle converge donc.

<u>Preuve de la règle pour les séries alternées</u> :

Dans ce cas :

$$B_n = (-1)^n$$

La série associée ne prenant que deux valeurs, 1 et 0, nous sommes dans le cas du préliminaire.

<u>Exemples de séries alternées</u> :

Les séries de terme général suivant sont alternées :

$$\boldsymbol{V_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}} \;\;\textbf{ si } \boldsymbol{n \neq 0},\;\; \boldsymbol{V_0 = 0}\,, \qquad \boldsymbol{\alpha} > 0$$

$$\boldsymbol{V_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}\,(Ln(n))^{\beta}}} \;\;\textbf{ si } \boldsymbol{n} > 1,\;\; \boldsymbol{V_0 = V_1 = 0}\,, \quad \boldsymbol{\alpha} > 0\,, \qquad \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$$

<u>Preuve</u> :

La première est triviale car la suite $\frac{1}{n^{\alpha}}$ tend vers 0 en décroissant à partir du rang 1

Pour la seconde, considérons la fonction sur $]1;+\infty[$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}\ (Ln(x))^{\beta}}$$

Dérivons son logarithme népérien :

$$Ln\big(f(x)\big) = -\alpha\ Ln(x) - \beta\ Ln(Ln(x))$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{x\ Ln(x)} = \frac{-\alpha\ Ln(x) - \beta}{x\ Ln(x)}$$

$f'(x)$ est du signe de $-\alpha\ Ln(x) - \beta$ et :

$$-\alpha\ Ln(x) - \beta < 0 \iff -\alpha\ Ln(x) < \beta \iff Ln(x) > -\frac{\beta}{\alpha} \iff x > e^{-\frac{\beta}{\alpha}}$$

En prenant :

$$x_0 = Max\left(1, e^{-\frac{\beta}{\alpha}}\right)$$

On a $f'(x) < 0$ et donc f strictement décroissante sur $]x_0;+\infty[$. La suite $f(n)$ est donc strictement décroissante à partir d'un certain rang n_0

La série de terme général $(-1)^n\ f(n)$ est donc alternée et donc convergente.