Suites et séries de fonctions - Séries entières

I Convergence simple-convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions numériques définies sur un même intervalle I

On dit que f_n converge simplement vers une fonction f si :

$$\forall\, x \in I :\ \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Autrement dit :

$$\forall\, x \in I\ \forall\, \varepsilon \in]0;+\infty[\ :\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \in \mathbb{N} :\ n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

On écrira :

$$f_n \underset{I}{\to} f$$

On dit que f_n converge uniformément vers une fonction f si :

$$\forall\, \varepsilon \in]0;+\infty[\ :\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, x \in I\ \ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

On écrira :

$$f_n \xrightarrow[unif\ I]{} f$$

<u>Propriété</u> :

$$f_n \xrightarrow[unif\ I]{} f \Rightarrow\ f_n \underset{I}{\to} f$$

Autrement dit, la convergence uniforme entraîne la convergence simple mais la réciproque est fausse.

<u>Preuve</u> :

Dans le sens direct, c'est une conséquence directe des définitions.

Pour la réciproque, il suffit de considérer la suite de fonctions suivantes sur l'intervalle $I =]0;1]$:

$$f_n(x) = n \qquad \text{si } x \in \left]0; \tfrac{1}{n}\right] \quad \text{et 0 sinon}$$

on a alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Donc, pour x fixé dans $]0;1]$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < x \Rightarrow f_n(x) = 0$$

Donc :

$$\forall\, x \in]0;1] : \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$$

La suite (f_n) converge donc simplement vers la fonction nulle.

Supposons par l'absurde que la convergence soit uniforme. Alors pour $\varepsilon = 1$ on a :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, x \in I \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} : \; n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| < 1$$

En particulier :

$$n > n_0 \Rightarrow \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| < 1 \Rightarrow n < 1$$

Ce qui est absurde.

La suite (f_n) ne converge donc pas uniformément vers la fonction nulle.

II Critère de Cauchy pour la convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions numériques définies sur un même intervalle I.

Alors la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction si et seulement si elle vérifie :

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{\varepsilon} \in]\mathbf{0}; +\infty[\; : \; \exists\, \boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N} : \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I} \;\; \forall\, (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}) \in \mathbb{N}^2 : \; \boldsymbol{n} > \boldsymbol{n_0} \Rightarrow \left| \boldsymbol{f_{n+p}(x) - f_n(x)} \right| < \varepsilon}$$

Ce critère est appelé critère de Cauchy pour la convergence uniforme.

Preuve :

Sens direct :

On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f.

Soit $\in]0;+\infty[$, alors pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, x \in I \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} :\; n \; > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Or :

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| = \left|f_{n+p}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)\right|$$

Donc :

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| \leq \left|f_{n+p}(x) - f(x)\right| + |f(x) - f_n(x)|$$

On a alors :

$$\forall\, (n,p) \in \mathbb{N}^2 :\; n \; > n_0 \Rightarrow \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc la suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy pour la convergence uniforme.

Sens réciproque :

On suppose que la suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy pour la convergence uniforme.

Alors pour $x \in I$ fixé, la suite $(f_n(x))$ vérifie le critère de Cauchy pour la convergence. Elle tend donc vers une limite que l'on peut noter $f(x)$ définissant ainsi une fonction sur I.

Montrons alors que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction f.

Soit $\varepsilon \in]0;+\infty[$ alors pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, x \in I \;\; \forall\, (n,p) \in \mathbb{N}^2 :\; n \; > n_0 \Rightarrow \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Fixons un entier $n \; > n_0$ et un réel $x \in I$ et faisons tendre l'entier naturel p vers l'infini. Par passage à la limite dans les inégalités, nous obtenons :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Cela prouve la convergence uniforme.

III Propriétés relatives à la convergence uniforme

Dans la suite, (f_n) est une suite de fonctions numériques convergeant uniformément sur un intervalle I vers une fonction f

1) **Caractère borné** :

Si

$$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} : \boldsymbol{f_n} \ \boldsymbol{born}\text{é}\boldsymbol{e}$$

alors :

$$\boldsymbol{f} \ \boldsymbol{born}\text{é}\boldsymbol{e}$$

Preuve :

Traduisons la convergence uniforme pour $\varepsilon = 1$

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, x \in I \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} : \ n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < 1$$

Or :

$$|f(x)| = \left|f(x) - f_{n_0+1}(x) + f_{n_0+1}(x)\right| \leq \left|f(x) - f_{n_0+1}(x)\right| + \left|f_{n_0+1}(x)\right|$$

Notant M un majorant de $\left|f_{n_0+1}\right|$ sur I, on en déduit :

$$\forall\, x \in I \ : |f(x)| \leq 1 + M$$

Donc f est bornée sur I

2) **Continuité en un point** :

Si

$$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} : \boldsymbol{f_n} \ \textbf{continue en } \boldsymbol{x_0}$$

alors :

$$\boldsymbol{f} \ \textbf{continue en } \boldsymbol{x_0}$$

Preuve :

Soit $\varepsilon \in]0;+\infty[$ alors pour $\frac{\varepsilon}{3} > 0$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, x \in I \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} :\; n \;> n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Or :

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|f(x) - f_{n_0+1}(x) + f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(x_0) + f_{n_0+1}(x_0) - f(x_0)\right|$$

Donc :

$$|f(x) - f(x_0)| \le \left|f(x) - f_{n_0+1}(x)\right| + \left|f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(x_0)\right| + \left|f_{n_0+1}(x_0) - f(x_0)\right|$$

De plus, la continuité de f_{n_0+1} en x_0 donne pour $\frac{\varepsilon}{3}$:

$$\exists\, \alpha \in]0;+\infty[: \forall\, x \in I \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} :\; x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\Rightarrow \left|f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

D'où :

$$x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

f est donc continue en x_0

IV Dérivabilité et convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions numériques définies sur un même intervalle I.

Si :

$$\exists\, x_0 \in I :\; f_n(x_0) \text{ converge}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\; f_n \text{ de classe } C_1 \text{ sur } I \text{ (dérivable à dérivée continue)}$$

$$f'_n \xrightarrow[unif\ I]{} g$$

Alors il existe une fonction f telle que pour toute partie bornée K de I :

$$f_n \xrightarrow[unif\ K]{} f$$

$$f \text{ de classe } C_1 \text{ sur } I$$

$$f' = g \text{ sur } I$$

Preuve :

Soit K partie bornée de I. Nous allons montrer que la suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy pour la convergence uniforme.

Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction :

$$h(x) = f_{n+p}(x) - f_n(x)$$

$$\exists\, c(x) \in \,]x_0; x[\ \text{ ou } \exists\, c(x) \in \,]x; x_0[\ :\ h(x) = h(x_0) + (x - x_0)\, h'\big(c(x)\big)$$

Soit :

$$f_{n+p}(x) - f_n(x) = f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)\left(f'_{n+p}\big(c(x)\big) - f'_n\big(c(x)\big)\right)$$

Donc :

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| \le \left|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right| + |x - x_0|\left|f'_{n+p}\big(c(x)\big) - f'_n\big(c(x)\big)\right|$$

La suite $f_n(x_0)$ converge. Elle vérifie donc le critère de Cauchy.

Soit $\varepsilon \in \,]0; +\infty[$ alors pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, (n,p) \in \mathbb{N}^2 :\ n > n_0 \Rightarrow \left|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

K étant bornée, on a :

$$\exists\, M \in \,]0; +\infty[\ :\ \forall\, (x,y) \in K^2 :\ |x - y| < M$$

Traduisons que la suite (f'_n) converge uniformément vers une fonction g par le critère de Cauchy pour la convergence uniforme :

pour $\frac{\varepsilon}{2\,M} > 0$:

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} :\ \forall\, x \in I\ \ \forall\, (n,p) \in \mathbb{N}^2\ :\ n > n_1 \Rightarrow \left|f'_{n+p}(x) - f'_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2\,M}$$

En prenant $n_2 = max(n_0, n_1)$ on a :

$$\forall\, x \in K\ \ \forall\, (n,p) \in \mathbb{N}^2\ :\ n > n_2 \Rightarrow \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + M\,\frac{\varepsilon}{2\,M} = \varepsilon$$

La suite (f_n) vérifie donc le critère de Cauchy pour la convergence uniforme sur K. Elle tend donc uniformément sur K vers une fonction f

Montrons maintenant que f est dérivable.

Soit $x \in I$ et h tel que $h \neq 0$ alors :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)$$

$$= \frac{f(x+h)-f_n(x+h)}{h} + \frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} + \frac{f_n(x)-f(x)}{h} - g(x)$$

D'où :

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)\right| \leq \left|\frac{f(x+h)-f_n(x+h)}{h}\right| + \left|\frac{f_n(x)-f(x)}{h}\right| + \left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - g(x)\right|$$

Le théorème des accroissements finis donne alors :

$$\exists\, c(x) \in]x; x+h[\text{ ou } \exists\, c(x) \in]x+h; x[\;:\; \frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} = f'_n(c(x))$$

Donc :

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)\right| \leq \frac{|f(x+h)-f_n(x+h)|}{|h|} + \frac{|f_n(x)-f(x)|}{|h|} + \left|f'_n(c(x)) - g(x)\right|$$

Or

$$\left|f'_n(c(x)) - g(x)\right| = \left|f'_n\big(c(x)\big) - g\big(c(x)\big) + g\big(c(x)\big) - g(x)\right|$$

Donc :

$$\left|f'_n(c(x)) - g(x)\right| \leq \left|f'_n\big(c(x)\big) - g\big(c(x)\big)\right| + \left|g\big(c(x)\big) - g(x)\right|$$

Soit $\varepsilon \in]0; +\infty[$ alors pour $\frac{\varepsilon}{4} > 0$ la convergence uniforme de f'_n vers g se traduit par

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, y \in I \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} :\; n > n_0 \Rightarrow \left|f'_n(y) - g(y)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

En particulier

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\; n > n_0 \Rightarrow \left|f'_n(c(x)) - g(c(x))\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Or les fonctions f'_n étant continues en x et convergeant uniformément vers g sur I, la fonction g est donc continue en x

Ainsi pour $\frac{\varepsilon}{4}$:

$$\exists\ \alpha \in]0;+\infty[\ :\ |h| < \alpha \Rightarrow\ |g(x+h) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Fixons h tel que $|h| < \alpha$ alors :

$$\left|g\big(c(x)\big) - g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Reste à traduire la convergence uniforme de f_n vers f sur l'intervalle $[x-h, x+h]$ ou $[x+h, x-h]$ selon le signe de h et pour $\frac{\varepsilon\,|h|}{4}$

$$\exists\ n_1 \in \mathbb{N} : \forall\ y \in I\ \ \forall\ n \in \mathbb{N} :\ n\ > n_1 \Rightarrow |f_n(y) - f(y)| <\ \frac{\varepsilon\,|h|}{4}$$

En particulier pour $n_2 = \max(n_0, n_1) + 1$

$$\begin{cases} \left|f_{n_2}(x) - f(x)\right| < \dfrac{\varepsilon\,|h|}{4} \\ \left|f_{n_2}(x+h) - f(x+h)\right| < \dfrac{\varepsilon\,|h|}{4} \end{cases}$$

Soit :

$$|h| < \alpha\ \ \Rightarrow \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\right| < \frac{\varepsilon\,|h|}{4\,|h|} + \frac{\varepsilon\,|h|}{4\,|h|} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

On en déduit que f est dérivable en x et que $f'(x) = g(x)$

V Séries de fonctions

1) Définition

Soit (f_n) une suite de fonctions numériques définies sur un même intervalle I. On peut lui associer la suite de fonction (S_n) appelée série de fonctions définie par :

$$\boldsymbol{S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)}$$

Si la série définie par la suite $(S_n(x))$ pour $x \in I$ fixé converge, alors on notera :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)}$$

La série converge alors simplement vers sa limite et cette fonction sera appelée somme de la série.

Une condition de convergence simple est donc pour tout $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$

$$\lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{f_n(x) = 0}$$

On dit que la série de fonctions associée à une suite $(\boldsymbol{f_n})$ **converge uniformément sur** $\boldsymbol{I}$ **si la suite de fonctions** $(\boldsymbol{S_n})$ **définie par ses sommes partielles converge uniformément sur** $\boldsymbol{I}$ **vers une fonction, appelée somme de la série**

2) <u>Critère de Cauchy pour la convergence uniforme</u>

La série de fonctions associée à une suite de fonctions $(\boldsymbol{f_n})$ **converge uniformément sur** $\boldsymbol{I}$ **si et seulement si elle vérifie le critère suivant, appelé critère de Cauchy pour la convergence uniforme :**

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{\varepsilon} \in \left]\boldsymbol{0}; +\infty\right[\ :\ \exists\, \boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N} : \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}\ \ \forall\, (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}) \in \mathbb{N}^{\boldsymbol{2}}\ :\ \boldsymbol{n} > \boldsymbol{n_0} \Rightarrow \left|\sum_{\boldsymbol{k=n}}^{\boldsymbol{n+p}} \boldsymbol{f_k(x)}\right| < \varepsilon}$$

<u>Preuve</u> :

Il suffit de noter que :

$$\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) = S_{n+p}(x) - S_{n-1}(x)$$

Et de noter qu'il s'agit du critère de convergence uniforme sur I pour la suite (S_n) des sommes partielles.

3) <u>**Convergence normale**</u> :

Une condition suffisante pour que la série de fonctions associée à une suite de fonctions $(\boldsymbol{f_n})$ **converge uniformément sur** $\boldsymbol{I}$ **est de vérifier le critère suivant dit de convergence normale :**

$$\exists\, (\boldsymbol{a_n}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} :\ \forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\ \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}\ :\ |\boldsymbol{f_n(x)}| \le \boldsymbol{a_n}$$

la série de terme général $\boldsymbol{a_n}$ **converge**

Preuve :

Montrons que la série de fonctions vérifie le critère de Cauchy pour la convergence uniforme en notant que pour tous entiers naturels on a :

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{n+p} a_k$$

La série de terme général a_n étant convergeant, elle vérifie le critère de Cauchy pour la convergence des séries.

Soit $\varepsilon \in]0;+\infty[$ alors :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, (n,p) \in \mathbb{N}^2 :\ n\ > n_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$$

On a donc :

$$\forall\, x \in I\ \ \forall\, (n,p) \in \mathbb{N}^2 :\ n\ > n_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

Ce qui prouve la convergence uniforme de la série de fonctions sur I

4) Propriété de continuité :

Soit une série de fonctions associée à une suite de fonctions (f_n) convergeant uniformément sur I et $x_0 \in I$

Si chaque f_n est continue en x_0 alors la fonction somme est continue en x_0

Preuve :

Il suffit d'appliquer à la suite des sommes partielles (S_n) la propriété de continuité dans le cas de convergence uniforme.

5) Propriété de dérivabilité :

Soit une série de fonctions associée à une suite (f_n) convergeant uniformément sur I et $x_0 \in I$

Si

$\exists\, x_0 \in I$: la série de terme général $f_n(x_0)$ converge

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ f_n de classe C_1 sur I

la série de fonctions de terme général $f'_n(x)$ converge uniformément sur I

alors :

la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge uniformément sur toute partie bornée de I.

De plus, si on note :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

$$T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k(x)$$

Alors :

S est dérivable sur I et : $\forall\, x \in \mathbb{R} : S'(x) = T(x)$

On notera dans ce cas :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k(x)$$

Et on qualifiera cette écriture de dérivation terme à terme.

Preuve :

Il suffit d'appliquer à la suite des sommes partielles (S_n) la propriété de dérivabilité dans le cas de convergence uniforme vue pour les suites de fonctions.

VI Séries entières

1) Définition

Une série entière est une série de fonctions associée à une suite de fonctions (f_n) de la forme :

$$\boldsymbol{f_n(x) = a_n\, x^n}$$

où (a_n) est une suite numérique

2) Rayon de convergence

Soit J l'ensemble des réels r positifs ou nuls pour lesquels la série de terme général $a_n\, r^n$ est absolument convergente. Alors, J est un intervalle non vide. La borne supérieure R de cet intervalle vérifie :

Si $= +\infty$, la série de fonctions associée à la suite de fonctions $(a_n\, x^n)$ converge normalement sur tout intervalle $[-r; r]$

Si $\in \mathbb{R}$, la série de fonctions associée à la suite de fonctions $(a_n\, x^n)$ converge normalement sur tout intervalle $[-r; r]$ avec $r < R$ et diverge trivialement si $|x| > R$ car son terme général ne tend pas vers 0.

Preuves :

Afin d'établir les preuves, nous allons commencer par montrer un préliminaire :

Si :

$$\exists\, \boldsymbol{r_0} \in [\boldsymbol{0}; +\infty[\ :\ \boldsymbol{a_n\, r_0{}^n}\ \textbf{bornée}$$

Alors :

Si $|x| < r_0$ alors la série de terme général $a_n\, x^n$ est absolument convergente

Preuve du préliminaire :

Supposons $a_n\, r_0{}^n$ bornée alors :

$$\exists\, M \in\,]0; +\infty[\ :\ \ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ |a_n\, r_0{}^n| \leq M$$

Or :

$$|a_n\, x^n| = \left|a_n\, {r_0}^n\, \frac{x^n}{{r_0}^n}\right| = |a_n\, {r_0}^n|\, \left|\frac{x}{r_0}\right|^n$$

Posons :

$$q = \left|\frac{x}{r_0}\right|$$

Si $|x| < r_0$ alors :

$$0 < q < 1$$

Et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\ |a_n\, x^n| \leq M\, q^n$$

Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs ou nuls montre que la série de terme général $|a_n\, x^n|$ converge donc que la série de terme général $a_n\, x^n$ est absolument convergente.

Revenons alors aux preuves initiales :

L'intervalle J n'est pas vide car $0 \in J$. Cet intervalle possède donc une borne supérieure $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Soit $r_1 \in [0; R[$ si $R \in \mathbb{R}$ ou $r_1 \in [0; +\infty[$ si $R = +\infty$ alors puisque $r_1 < R$, r_1 n'est pas un majorant de J donc :

$$\exists\, r \in J :\ r > r_1$$

la série de terme général $a_n\, r^n$ est donc absolument convergente et on a :

$$\forall\, x \in [-r; r]\ \ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ |a_n\, x^n| \leq |a_n\,|\, |x|^n\ \leq |a_n\,|\, r^n$$

La série de terme général $|a_n\,|\, r^n$ converge, donc la série de fonctions associée à la suite de fonctions $(a_n\, x^n)$ converge donc normalement sur $[-r; r]$

En particulier, la série de terme général $|a_n\,|\, {r_1}^n$ converge, donc $r_1 \in J$ et J est un intervalle

Soit maintenant $r \in]R; +\infty[$ si $R \in \mathbb{R}$

Supposons par l'absurde que la suite $a_n\, r^n$ tende vers 0 alors elle serait bornée ; Pour $R < q < r$ on aurait la série de terme général $|a_n\,|\, q^n$ convergente donc $q < R$ ce qui est absurde.

La série de terme général $a_n\, r^n$ diverge donc trivialement, le terme général ne tendant pas vers 0

3) Détermination pratique du rayon de convergence

Si un réel positif R ou nul est tel que la série fonctions associée à la suite de fonctions $(a_n\, r^n)$ converge absolument si $r < R$ et diverge si $r > R$ alors R est le rayon de convergence de cette série.

Preuve :

Notons R' le rayon de convergence de la série associée à $(a_n\, x^n)$. Alors pour tout $r < R$ la série de terme général $a_n\, r^n$ converge donc :

$$R \leq R'$$

pour tout $r > R$ la série de terme général $a_n\, r^n$ diverge donc :

$$R \geq R'$$

Il en résulte l'égalité.

Exemples d'usage :

Les règles de D'Alembert et de Cauchy qui suivent sont des applications de ce principe.

4) Règle de D'Alembert pour déterminer le rayon de convergence

Soit la série fonctions associée à la suite de fonctions $(a_n\, x^n)$ et soit R son rayon de convergence.

Si

$a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

alors :

$$\text{Si } L = 0, \quad R = +\infty$$

$$\text{Si } L = +\infty, \quad R = 0$$

$$\text{Si } L \in \left]0; +\infty\right[, \quad R = \frac{1}{L}$$

Preuve :

Il suffit de noter que pour tout $r > 0$

$$\frac{|a_{n+1}\, r^{n+1}|}{|a_n\, r^n|} = r\, \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

La règle de d'Alembert pour les séries à termes positifs donne alors :

Si $L = 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}\, r^{n+1}|}{|a_n\, r^n|} = 0$$

Donc pour tout $r > 0$ la série de terme général $a_n\, r^n$ est absolument convergente et donc :

$$R = +\infty$$

Si $L = +\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}\, r^{n+1}|}{|a_n\, r^n|} = +\infty$$

Donc pour tout $r > 0$ la série de terme général $|a_n\, r^n|$ est divergente et donc :

$$R = 0$$

Si $L \in\,]0; +\infty[$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}\, r^{n+1}|}{|a_n\, r^n|} = r\, L$$

Donc, si $r\, L < 1$ la série de terme général $|a_n\, r^n|$ est convergente et si $r\, L > 1$ elle est divergente. On en déduit :

$$R = \frac{1}{L}$$

5) Règle de Cauchy pour déterminer le rayon de convergence

Soit la série fonctions associée à la suite de fonctions $(a_n\, x^n)$ et soit R son rayon de convergence.

Si $$\lim_{n\to+\infty} \lvert a_n \rvert^{\frac{1}{n}} = L$$ **Alors :** $$\text{Si } L = 0\,,\quad R = +\infty$$ $$\text{Si } L = +\infty\,,\quad R = 0$$ $$\text{Si } L \in \,]0; +\infty[\,,\quad R = \frac{1}{L}$$

Preuve :

Il suffit de noter que pour tout $r > 0$

$$\lvert a_n\, r^n \rvert^{\frac{1}{n}} = r\, \lvert a_n \rvert^{\frac{1}{n}}$$

La règle de Cauchy pour les séries à termes positifs ou nuls donne alors :

Si $L = 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \lvert a_n\, r^n \rvert^{\frac{1}{n}} = 0$$

donc pour tout $r > 0$ la série de terme général $a_n\, r^n$ est absolument convergente et donc :

$$R = +\infty$$

Si $L = +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \lvert a_n\, r^n \rvert^{\frac{1}{n}} = +\infty$$

Donc pour tout $r > 0$ la série de terme général $\lvert a_n\, r^n \rvert$ est divergente et donc :

$$R = 0$$

Si $L \in \,]0; +\infty[$:

$$\lim_{n\to+\infty} \lvert a_n\, r^n \rvert^{\frac{1}{n}} = r\, L$$

Donc, si $r\, L < 1$ la série de terme général $\lvert a_n\, r^n \rvert$ est convergente et si $r\, L > 1$ elle est divergente. On en déduit :

$$R = \frac{1}{L}$$

6) **Exemples d'application des règles de D'Alembert et de Cauchy**

Nous noterons pour simplifier les séries de fonctions sous la forme $\sum a_n \, x^n$

Exemple 1 :

$$\sum \frac{1}{n!} \, x^n$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{(n+1)!} \times n! = \frac{1}{n+1}$$

$$L = 0, \;\; R = +\infty$$

Exemple 2 :

$$\sum n! \; x^n$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

$$L = +\infty, \;\; R = 0$$

Exemple 3 :

$$\sum \frac{1}{n} \, x^n$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1} \times n = \frac{n}{n+1}$$

$$L = 1, \;\; R = 1$$

Exemple 4 : dans cet exemple, les règles de D'Alembert et de Cauchy ne s'appliquent pas.

$$\sum cos(n\,\theta)\,x^n$$

Mais on note que l'on a pour tout réel θ et tout entier naturel n :

$$|cos(n\,\theta)| \leq 1$$

Donc pour tout réel $0 \leq r < 1$:

$$|cos(n\,\theta)\,r^n| \leq r^n$$

La série $\sum cos(n\,\theta)\,r^n$ est donc, par comparaison, absolument convergente. On en déduit, pour son rayon de convergence :

$$R \geq 1$$

Montrons alors que la série diverge trivialement pour $r = 1$ en supposant par l'absurde, que la suite de terme général $cos(n\,\theta)$ tende vers 0. Alors on aurait :

<u>1er cas</u> : $sin(\,\theta) = 0$ soit $\theta = k\,\pi\,, k \in \mathbb{Z}$

alors $cos(n\,\theta) = (-1)^{n\,k}$ donc la suite de terme général $cos(n\,\theta)$ ne tend pas vers 0.

<u>2ème cas</u> : $sin(\,\theta) \neq 0$

Alors

$$cos\big((n+1\,)\theta\big) = cos(n\,\theta)\,cos(\,\theta) - sin(n\,\theta)\,sin(\,\theta)$$

La suite $cos\big((n+1\,)\theta\big)$ extraite de la suite $cos(n\,\theta)$ tendrait donc vers 0 et par conséquent, la suite $sin(n\,\theta)$ tendrait vers 0. Or on a également :

$$cos^2(n\,\theta) + sin^2(n\,\theta) = 1$$

Par passage à la limite, on aurait ainsi :

$$0 + 0 = 1$$

Ce qui est absurde.

La série $\sum cos(n\,\theta)\,r^n$ ne converge donc pas pour $r = 1$, car son terme général ne tend pas vers 0. On en déduit :

$$R \leq 1$$

Donc :

$$R = 1$$

7) Propriété de continuité et de dérivabilité de la somme d'une série de fonctions

Soit une série de fonctions $\sum a_n\, x^n$ de rayon de convergence $R \neq 0$, notons :

$$\boldsymbol{S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n\, x^n}$$

alors

Les séries de fonctions $\sum a_n\, x^n$ et $\sum n\, a_n\, x^{n-1}$ ont même rayon de convergence

S est de classe C_∞ (dérivable à tout ordre) sur $]-R; R[$ et :

$$\forall\, \boldsymbol{p} \in \mathbb{N}^* : \forall\, \boldsymbol{x} \in]-\boldsymbol{R}; \boldsymbol{R}[: \quad \boldsymbol{S^{(p)}(x) = \sum_{k=p}^{+\infty} k\,(k-1)\ldots(k-p+1) a_k\, x^{k-p}}$$

En particulier :

$$\forall\, \boldsymbol{p} \in \mathbb{N}^* \;\; \boldsymbol{S^{(p)}(0) = p\,!\;a_p}$$

et si il existe un réel $0 < r < R$ tel que sur $[-r; r]$ on ait :

$$\boldsymbol{S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} b_n\, x^n}$$

alors :

$$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} : \quad \boldsymbol{a_n = b_n}$$

<u>Preuves</u> :

Soit la série $\sum n\, a_n\, x^{n-1}$ que l'on peut encore noter par renumérotation :

$$\sum (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$$

<u>1er cas</u> : $R \in]0; +\infty[$

Soit $0 < r < R$ alors en posant :

$$b = \frac{r+R}{2}, \qquad q = \frac{r}{b} < 1$$

On a

$$|(n+1)\, a_{n+1}\, r^n| = \frac{1}{r}(n+1)\, |a_{n+1}|\, r^{n+1} = \frac{1}{r}(n+1)\, \left(\frac{r}{b}\right)^{n+1} |a_{n+1}|\, b^{n+1}$$

$$= \frac{1}{r}(n+1)\, q^{n+1}\, |a_{n+1}|\, b^{n+1}$$

Or :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{r}(n+1)\, q^{n+1} = 0$$

Donc :

$$\exists\, M \in \,]0; +\infty[\, : \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} : \frac{1}{r}(n+1)\, q^{n+1} \leq M$$

Donc :

$$|(n+1)\, a_{n+1}\, r^n| \leq M\, |a_{n+1}|\, b^{n+1}$$

Or la série de terme général $|a_{n+1}|\, b^{n+1}$ converge, donc par comparaison, la série de terme général $(n+1)\, a_{n+1}\, r^n$ est absolument convergente.

Soit $r > R$ alors:

$$|(n+1)\, a_{n+1}\, r^n| = \frac{1}{r}(n+1)\, |a_{n+1}|\, r^{n+1}$$

Donc :

$$|(n+1)\, a_{n+1}\, r^n| \geq \frac{1}{r}\, |a_{n+1}|\, r^{n+1}$$

Or la série de terme général $|a_{n+1}|\, r^{n+1}$ tend vers $+\infty$, donc par comparaison, la série de terme général $|(n+1)\, a_{n+1}\, r^n|$ tend vers $+\infty$

On en déduit que la série de terme général $(n+1)\, a_{n+1}\, x^n$ a pour rayon de convergence R

<u>2ème cas</u> : $R = +\infty$

Traitement analogue au premier cas première partie en prenant $0 < r < b$

<u>3ème cas</u> : $x = 0$

Traitement analogue au premier cas seconde partie.

Traitons maintenant la dérivabilité terme à terme sur $]-R; R[$:

Soit $x \in \,]-R; R[$ alors en prenant $0 < |x| < r < R$ la convergence de la série de fonctions $\sum a_n\, x^n$ sur l'intervalle $[-r; r]$ le caractère C_1 de chaque fonction $a_n\, x^n$ sur $[-r; r]$ et la convergence uniforme de la série des fonctions dérivées $(n+1)\ a_{n+1}\ x^n$ sur $[-r;r]$ justifie la dérivabilité de la fonction somme de la série $a_n\ x^n$ sur $[-r;r]$ et la dérivation sous le signe somme, soit :

$$\forall\ x \in [-r;r]\ :$$

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\ x^k\right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} k\ a_k\ x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\ a_{k+1}\ x^k$$

Par une récurrence évidence on peut poursuivre le procédé de dérivation à n'importe quel ordre.

VII Fonctions développables en série entière

1) Définition-propriétés

Une fonction numérique $\boldsymbol{f}$ est dite développable en série entière au voisinage de $\boldsymbol{x_0}$ si il existe une suite $(\boldsymbol{a_n})$ de réels telle que la série $\sum \boldsymbol{a_n}\ \boldsymbol{x^n}$ soit de rayon $\boldsymbol{R} > 0$ et s'il existe un réel $\mathbf{0} < \boldsymbol{\alpha} \leq R$ tel que :

$$\forall\ \boldsymbol{x} \in\ ]\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{\alpha}[\ :\ \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k=0}}^{+\infty} \boldsymbol{a_k}\ (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})^{\boldsymbol{k}}$$

$\boldsymbol{f}$ est alors de classe $\boldsymbol{C}_\infty$ sur $]\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{\alpha}[$ et :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k=0}}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x_0})}{\boldsymbol{k}\,!}\ (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})^{\boldsymbol{k}}$$

Ainsi, le développement en série entière, lorsqu'il existe est unique

2) Conditions suffisantes de développement en série entière au voisinage de 0

Condition 1

Soit une fonction numérique f de classe C_∞ sur $]-\alpha;-\alpha[$ avec $\alpha > 0$

Si :

$$\exists\, M \in [0;+\infty[\quad \textbf{et} \quad \exists\, r \in \mathbb{R} : 0 < r < \alpha \;:\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \forall\, x \in]-r;r[\;:\; \left|\frac{f^{(n)}(x)}{n\,!}\right| \leq \frac{M}{r^n}$$

alors f est somme de sa série de Taylor sur $]-r;r[$

Condition 2

Soit une fonction numérique f de classe C_∞ sur un intervalle I contenant un intervalle de la forme $]-\alpha;-\alpha[$ avec $\alpha > 0$

Si :

$$\exists\, M \in [0;+\infty[\quad \textbf{et} \quad : \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \forall\, x \in I \;:\; \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$$

alors f est somme de sa série de Taylor sur I

Preuve :

Condition 1

Le développement de Taylor entre 0 et x à l'ordre n s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}\, x^k + \frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)\,!}\, x^{n+1}$$

où $c(x) \in]0;x[$ ou $c(x) \in]x;0[$

Donc :

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}\, x^k\right| \leq \frac{M}{r^{n+1}}\, |x|^{n+1} \leq M \left(\frac{|x|}{r}\right)^{n+1}$$

Or $|x| < r$ donc :

$$\lim_{n \to +\infty} M \left(\frac{|x|}{r}\right)^{n+1} = 0$$

On en déduit :

$$\forall\, x \in]-r;r[\;:\; f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}\, x^k$$

<u>Condition 2</u> :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}\, x^k \right| \le \frac{M\,|x|^{n+1}}{(n+1)\,!}$$

La règle de D'Alembert pour les suites montre que la suite majorante tend vers 0, ce qui établit le résultat.

3) Fonctions usuelles développables en série entière au voisinage de 0

a) Rayon de convergence infini

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\,!}\, x^k$$

$$ch(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,k)\,!}\, x^{2\,k}$$

$$sh(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,k+1)\,!}\, x^{2\,k+1}$$

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k)\,!}\, x^{2\,k}$$

$$sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)\,!}\, x^{2\,k+1}$$

Preuves :

On utilise les développements de Taylor :

- Pour $f(x) = e^x,\ f^{(n)}(x) = e^x$

Soit $r \in]0, +\infty[$. Alors :

$$\forall\, x \in [-r, r] :\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq e^r$$

Donc, en utilisant la condition 2) f est somme de sa série de Taylor sur $[-r, r]$ donc sur $\mathbb{R}$.

- Pour $ch(x)$ et $sh(x)$

On peut utiliser :

$$\forall x \in \mathbb{R} : ch(x) = \frac{1}{2}\ (e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\,!}\ x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\,!}\ (-x)^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,k)\,!}\ x^{2\,k}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : sh(x) = \frac{1}{2}\ (e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\,!}\ x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\,!}\ (-x)^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,k+1)\,!}\ x^{2\,k+1}$$

Le développement de $ch(x)$ est donc la partie paire de celui de e^x et celui de $sh(x)$ sa partie impaire.

- Pour $cos(x)$ et $sin(x)$

Il suffit de noter que :

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$$

f est donc somme de sa série de Taylor sur $\mathbb{R}$ d'après la condition 2)

b) Rayon de convergence égal à 1

$$\forall\, x \in \left]-1;1\right[\,:\, \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

$$\forall\, x \in \left[-1;1\right[\,:\, Ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k$$

$$\forall\, x \in \left]-1;1\right[\,:\, \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, x^k$$

$$\forall\, x \in \left]-1;1\right] \,:\, Ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

$$\forall\, x \in \left[-1;1\right] \,:\, Tan^{-1}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k+1} x^{2\,k+1}$$

$$\forall\, x \in \left]-1;1\right[\,:\, (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k\,!}\, x^k$$

Preuves :

Pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$: :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Or :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0 \Leftrightarrow |x| < 1$$

Donc :

$$\forall\, x \in \left]-1;1\right[\,:\, \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

Et, la convergence étant uniforme sur tout sous-intervalle $[a;b]$ de $]-1;1[$: on peut intervertir le signe somme et le signe intégral sur un tel intervalle, à savoir :

$$\int_a^b \frac{1}{1-t}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b t^k\,dx$$

En particulier :

$$\forall\, x \in \,]-1;1[\, : \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x t^k\,dx$$

Soit :

$$-\,Ln(1-x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1}$$

D'où, par changement d'indice :

$$Ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k$$

Pour établir la validité de l'égalité en (-1), il suffit de noter que pour x fixé dans $[-1;0]$ la série de terme général $\frac{1}{k}x^k$ est alternée et de terme général tendant vers 0 en valeur absolue en décroissant. On peut donc appliquer la majoration du reste :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k\right| \le \left|\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right| \le \frac{1}{n+1}$$

Le majorant tendant vers 0 indépendamment de x, la série converge uniformément sur $[-1;0]$. Comme chaque terme de cette série est une fonction continue sur $[-1;0]$, la somme de cette série est donc une fonction continue sur $[-1;0]$. Or:

$$\lim_{x\to(-1)^+} Ln(1-x) = \lim_{x\to(-1)^+} -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k$$

Ainsi :

$$Ln(2) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} (-1)^k$$

On déduit des deux précédents développements les deux suivants :

$$\forall\, x \in \,]-1;1[\, : \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, x^k$$

$$\forall\, x \in \left]-1;1\right] :\ Ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

Et pour $f(x) = Tan^{-1}(x)$ on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Donc

$$\forall\, x \in \left]-1;1\right[:\ f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, (x^2)^k$$

Soit par intégration :

$$\forall\, x \in \left]-1;1\right[:\ f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^k\, t^{2\,k}\, dt$$

D'où :

$$\forall\, x \in \left]-1;1\right[:\ f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k+1} x^{2\,k+1}$$

Pour la validité en 1 et en (-1) on procède comme précédemment en justifiant que la série converge uniformément sur $[-1;0]$ et sur $[0;1]$ par argument de série alternée et on passe à la limite en 1 et en (-1) l'égalité précédente.