Séries doubles réelles ou complexes

I Définition : suite double et série double

On appelle suite double, une suite indexée par deux indices n et m de terme général réel ou complexe $U_{n,m}$ c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On définit la série double de terme général $U_{n,m}$ comme étant la suite double de terme général $S_{N,M}$ défini par :

$$S_{N,M} = \sum_{\substack{0 \le n \le N \\ 0 \le m \le M}} U_{n,m}$$

II Convergence d'une suite double

On dit d'une suite double de terme général $U_{n,m}$ qu'elle converge vers un réel (ou un complexe) L si :

$$\forall\, \varepsilon > 0 :\ \exists\, (n_0, m_0) \in \mathbb{N}^2 : \forall\, (n, m) \in \mathbb{N}^2 : \begin{cases} n > n_0 \\ m > m_0 \end{cases} \Rightarrow \left|U_{n,m} - L\right| < \varepsilon$$

Le réel est alors appelé somme de la série et noté

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} U_{n,m}$$

Propriété :

Une suite double converge si et seulement si elle vérifie un critère analogue à celui de Cauchy qui est :

$$\forall\, \varepsilon > 0 :\ \exists\, (n_0, m_0) \in \mathbb{N}^2 : \forall\, (n, m, p, q) \in \mathbb{N}^4 : \begin{cases} n > n_0 \\ m > m_0 \end{cases} \Rightarrow \left|U_{n+p,m+q} - U_{n,m}\right| < \varepsilon$$

III Convergence d'une série double

Une série double de terme général $U_{n,m}$ est convergente si la suite double $S_{N,M}$ associée est convergente.

Propriété 1 :

une condition suffisante de convergente pour la série double de terme général $U_{n,m}$ est que la série double de terme général $\left|U_{n,m}\right|$ soit convergente. On dit alors que la série est absolument convergente.

Propriété 2 :

Si une série double de terme général $U_{n,m}$ est convergente, alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\ \left(\sum_{m=0}^{M} U_{n,m}\right)_{M\in\mathbb{N}} converge$$

$$\forall\, m \in \mathbb{N} :\ \left(\sum_{n=0}^{N} U_{n,m}\right)_{N\in\mathbb{N}} converge$$

$$\left(\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{+\infty}U_{n,m}\right)_{N\in\mathbb{N}}\ converge$$

$$\left(\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{+\infty}U_{n,m}\right)_{M\in\mathbb{N}}\ converge$$

$$\left(\sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{n}U_{p,n-p}\right)_{N\in\mathbb{N}}\ converge$$

Et :

$$\boxed{\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}U_{n,m}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}U_{n,m}=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}U_{n,m}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{n}U_{p,n-p}}$$

Mais ce n'est pas parce que l'une des trois suites précédentes converge que la série double converge comme le montre un exemple simple :

$$U_{n,m}=0\ si\ n\,m\neq 0\ ou\ n=m=0, U_{0,m}=1\ si\ m>0, U_{n,0}=-1\ si\ n>0$$

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{n}U_{p,n-p}=0$$

Donc la sommation en diagonales est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{n}U_{p,n-p}=0$$

En revanche la série double ne converge pas car pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N+1}U_{n,m}=1$$

IV Cas particulier des séries doubles à termes positifs ou nuls

Soit une série double de terme général $\boldsymbol{U_{n,m}}$. Alors cette série double converge si et seulement elle vérifie :

$$\exists\ \boldsymbol{b}\in\,]\boldsymbol{0},+\infty[\ :\ \forall\,(\boldsymbol{N},\boldsymbol{M})\in\mathbb{N}^2:\sum_{\substack{\boldsymbol{0\le n\le N}\\ \boldsymbol{0\le m\le M}}}\boldsymbol{U_{n,m}}\le\boldsymbol{b}$$

Preuve :

$(\Rightarrow)$ On suppose que la série double converge vers L. Supposons alors par l'absurde :

$$\exists\,(N_0,M_0)\in\mathbb{N}^2:\sum_{\substack{0\le n\le N_0\\ 0\le m\le M_0}}U_{n,m}>L$$

Alors on aurait :

$$\forall\,(N,M)\in\mathbb{N}^2\ :\ \begin{cases}N>N_0\\ M>M_0\end{cases}\Rightarrow\ \sum_{\substack{0\le n\le N\\ 0\le m\le M}}U_{n,m}\ge\sum_{\substack{0\le n\le N_0\\ 0\le m\le M_0}}U_{n,m}>L$$

Et par passage à la limite :

$$L \geq \sum_{\substack{0 \leq n \leq N_0 \\ 0 \leq m \leq M_0}} U_{n,m} > L$$

Ce qui est absurde. Donc :

$$\forall\,(N, M) \in \mathbb{N}^2 \colon \sum_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 0 \leq m \leq M}} U_{n,m} \leq L$$

$(\Leftarrow)$ Considérons :

$$b = sup_{(N,M)\in\mathbb{N}^2} \left\{ \sum_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 0 \leq m \leq M}} U_{n,m} \right\}$$

Montrons que la série double converge vers b. Soit $\varepsilon > 0$, alors :

$$\exists\,(N_0, M_0) \in \mathbb{N}^2 \colon\ b - \varepsilon < \sum_{\substack{0 \leq n \leq N_0 \\ 0 \leq m \leq M_0}} U_{n,m} \leq b$$

Et :

$$\forall\,(N, M) \in \mathbb{N}^2 : \begin{cases} N > N_0 \\ M > M_0 \end{cases} \Rightarrow\ b - \varepsilon < \sum_{\substack{0 \leq n \leq N_0 \\ 0 \leq m \leq M_0}} U_{n,m} \leq \sum_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 0 \leq m \leq M}} U_{n,m} \leq b$$

Donc la série converge vers b.

<u>Conséquence</u> :

Une série double à terme positifs ou nuls converge si et seulement si une des trois suites suivantes converge :

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{+\infty} \boldsymbol{U_{n,m}}\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

$$\left(\sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{+\infty} \boldsymbol{U_{n,m}}\right)_{M\in\mathbb{N}}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \sum_{p=0}^{n} \boldsymbol{U_{p,n-p}}\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

<u>Preuve</u> :

Seule la réciproque est à démontrer :

Supposons par exemple que la première des trois suites précédentes converge. Alors on a :

$$\sum_{\substack{0\leq n\leq N\\0\leq m\leq M}} U_{n,m} \leq \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{+\infty} U_{n,m} \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} U_{n,m} = b$$

Le critère démontré précédemment s'applique.

V Quelques exemples

Exemple 1 :

On considère la fonction :

$$\zeta(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$$

On rappelle que cette fonction, associée aux séries de Riemann est définie sur $]1, +\infty[$

On considère la fonction :

$$f(x) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{(n+m+1)^x}$$

Déterminer le domaine de définition de f et exprimer $f(x)$ à partir de $\zeta(x)$.

Réponse :

La série double est à terme positifs. Considérons donc la somme en diagonales :

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{n} U_{p,n-p} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(p+n-p+1)^x}$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(n+1)^x} = \sum_{n=0}^{N} (n+1)\frac{1}{(n+1)^x}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)^{x-1}} = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^{x-1}}$$

Cette série converge si et seulement si $x-1>1$ soit $x>2$

f est donc définie sur $]2, +\infty[$ et :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-1}} = \zeta(x-1)$$

Exemple 2 :

Soit la série double, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2$:

$$\sum_{\substack{n\geq 2\\m\geq 2}} \frac{z^n}{m^n}$$

Montrer qu'elle est convergente

Réponse :

On va montrer qu'elle est absolument convergente en partant de :

$$\sum_{\substack{2\le n\le N\\2\le m\le M}} \frac{|z|^n}{m^n} = \sum\nolimits_{n=2}^{N} \sum\nolimits_{m=2}^{M} \left(\frac{|z|}{m}\right)^n$$

Cette série double est à termes positifs et est majorée par :

$$\sum\nolimits_{m=2}^{M} \sum\nolimits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{|z|}{m}\right)^n = \sum\nolimits_{m=2}^{M} \left(\frac{|z|}{m}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{|z|}{m}} = \sum\nolimits_{m=2}^{M} \left(\frac{|z|}{m}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{|z|}{m}}$$

$$= \sum\nolimits_{m=2}^{M} \frac{|z|^2}{m\,(m-|z|)}$$

Or, le terme général de cette série est :

$$\frac{|z|^2}{m\,(m-|z|)} \sim \frac{|z|^2}{m^2}$$

Donc la série converge et est donc majorée. On en déduit que la série double initiale converge et :

$$\sum_{\substack{2\le n\le N\\2\le m\le M}} \frac{z^n}{m^n} = \sum\nolimits_{m=2}^{+\infty} \sum\nolimits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{|z|}{m}\right)^n = \sum\nolimits_{m=2}^{+\infty} \frac{z^2}{m\,(m-z)}$$

Exemple 3 :

Soit la série double à termes postifs :

$$\sum_{n\ge 2} \left(\sum_{m\ge 1} \frac{1}{m^n} - 1\right) = \sum_{n\ge 2} \sum_{m\ge 2} \frac{1}{m^n} = \sum_{m\ge 2} \sum_{n\ge 2} \frac{1}{m^n} = \sum_{m\ge 2} \frac{1}{m^2} \frac{1}{1-\frac{1}{m}}$$

$$= \sum_{m\ge 2} \frac{1}{m\,(m-1)} = \sum_{m\ge 2} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = 1$$

Exemple 4 :

Soit la série double de terme général :

$$U_{p,q} = \frac{p^q}{(p+1)^{q+1}} - \frac{(p+1)^q}{(p+2)^{q+1}} \ si\ p\ q \neq 0, 0\ sinon$$

Cette série converge-t-elle ?

Calculons :

$$\sum\nolimits_{p=1}^{+\infty} \sum\nolimits_{q=1}^{+\infty} \left(\frac{p^q}{(p+1)^{q+1}} - \frac{(p+1)^q}{(p+2)^{q+1}}\right)$$

$$= \sum\nolimits_{p=1}^{+\infty} \left(\sum\nolimits_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p+1} \left(\frac{p}{p+1}\right)^q - \sum\nolimits_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p+2} \left(\frac{p+1}{p+2}\right)^q\right)$$

$$= \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p+1} \frac{p}{p+1} \frac{1}{1 - \frac{p}{p+1}} - \frac{1}{p+2} \frac{p+1}{p+2} \frac{1}{1 - \frac{p+1}{p+2}} \right)$$

$$= \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{p+1} - \frac{p+1}{p+2} \right)$$

$$= \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{p\,(p+2) - (p+1)^2}{(p+1)\,(p+2)} \right)$$

$$= \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+1} \right) = -\frac{1}{2}$$

Puis :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{p^q}{(p+1)^{q+1}} - \frac{(p+1)^q}{(p+2)^{q+1}} \right)$$

$$= \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{q+1}} = \frac{1}{2^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Les deux sommes ayant des valeurs différentes, la série double n’est pas convergente.