Mouvement de la Terre autour du Soleil. Durée des saisons

I Caractéristiques du mouvement du système Terre-Lune

Considérons le mouvement du centre de gravité M du système Terre-Lune dans le référentiel héliocentrique. En négligeant l'influence des autres planètes du système solaire, ce système est soumis à la force gravitationnelle exercée par le soleil, laquelle est une force centrale. Nous avons établi par les lois de Newton qu'un tel mouvement s'inscrivait sur une trajectoire qui est soit elliptique, soit parabolique, soit hyperbolique. Or l'expérience nous montre que cette trajectoire ne peut être qu'une ellipse, dont un des foyers est le centre du soleil.

Des mesures astronomiques (en millions de kms) ont permis d'établir les caractéristiques de cette ellipse :

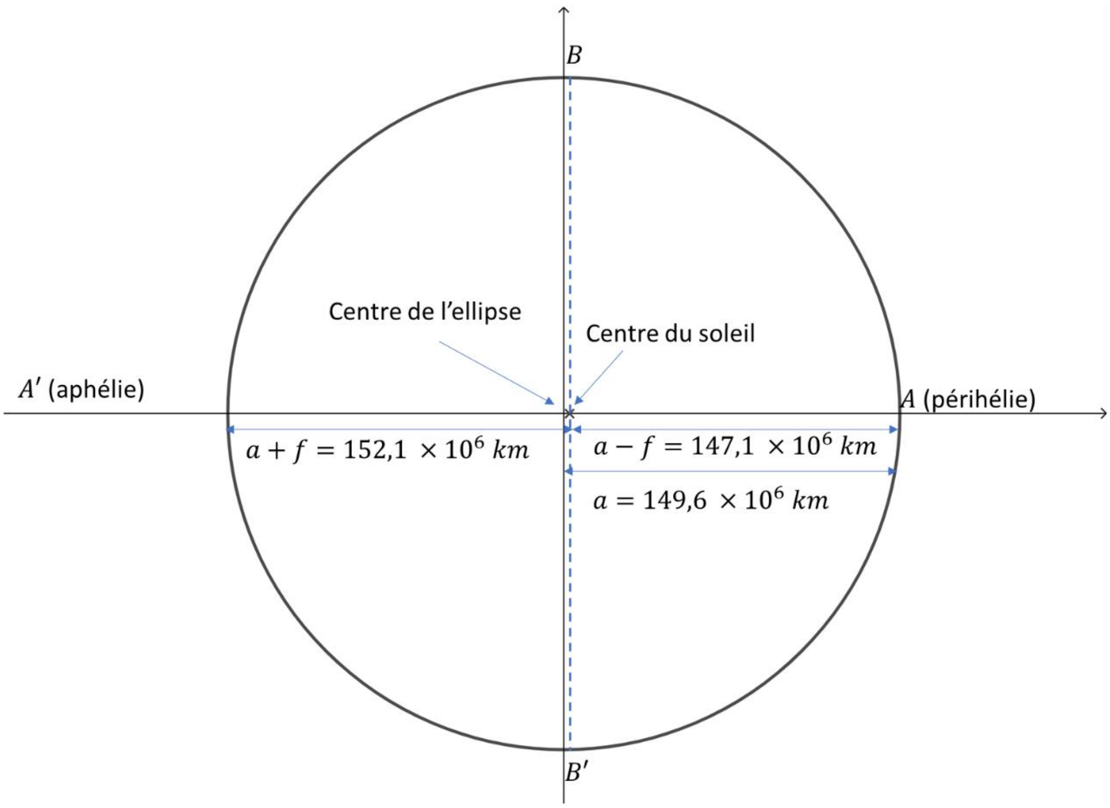
Distance du centre au foyer = $f = 2{,}5$

Demi grand axe = $a = 149{,}6$

Demi petit axe = $b = \sqrt{a^2 - f^2} = \sqrt{149{,}6^2 - 2{,}5^2} \approx 149{,}6 = a$

Au vu de ces caractéristiques, on constate que cette ellipse est quasiment un cercle.

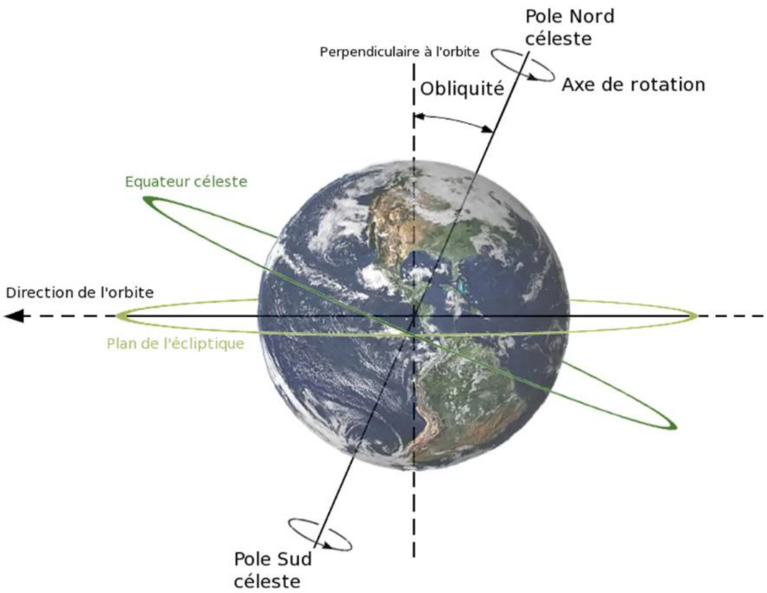
Le plan contenant cette ellipse est appelé **plan de l'écliptique**. Dans ce plan, en respectant une échelle, la trajectoire du centre de gravité Terre-Lune a l'allure suivante.



La trajectoire du centre de la Terre dans le référentiel héliocentrique oscille très faiblement autour de cette trajectoire de telle sorte que pour les ordres de grandeurs des distances considérées ici, on peut considérer que le centre de la Terre a également cette trajectoire, la distance entre ce dernier et le centre de gravité Terre-Lune étant de l'ordre du dixième de millions de km, qui est la précision employée ici.

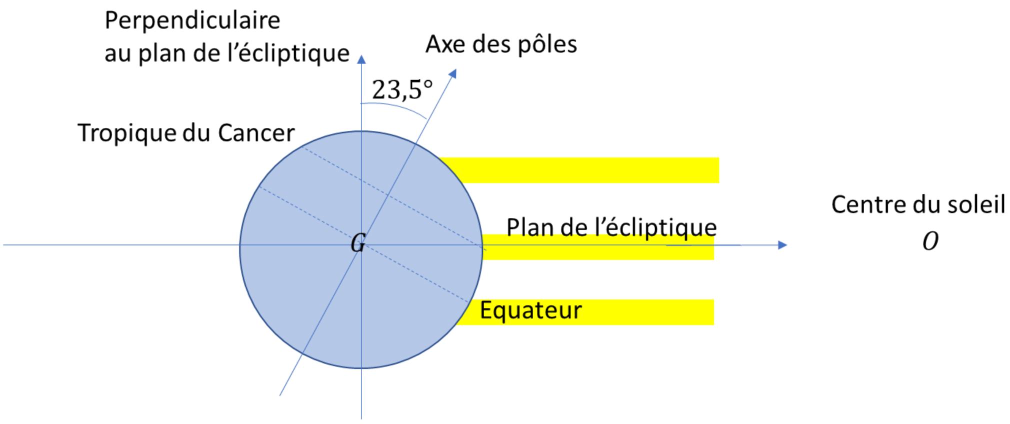
II Obliquité, excentricité, précession des équinoxes

1) Obliquité, solstices et équinoxes



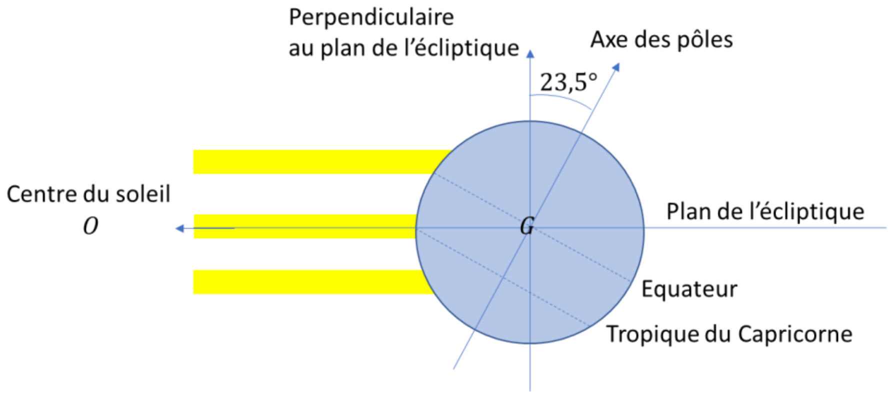
La Terre tourne sur elle-même dans le référentiel géocentrique autour de l'axe des pôles, ce qui fait le jour et la nuit. Mais son axe de rotation est incliné d'un angle par rapport à la perpendiculaire au plan de l'écliptique, phénomène appelé **obliquité**. Cet angle varie de façon périodique tous les 40 000 ans environ de 21,9° à 24,5°. Il vaut aujourd'hui de 23° 26' 11'' soit environ 23,5°. Cette obliquité est responsable du phénomène des saisons. En effet, si nous désignons par O le centre du soleil et par G le centre de la Terre, les débuts des 4 saisons sont définis comme suit :

- **Le solstice d'été** correspond à l'instant où la droite (OG) coupe le tropique du cancer. C'est donc le jour où un point du globe situé dans l'hémisphère nord au-dessus de ce tropique recevra le maximum d'ensoleillement, où le soleil y attendra sa hauteur maximale au- dessus de l'horizon et où le jour y sera le plus long. Sur notre calendrier, ce temps advient au cours de la journée du 21 juin 2022. En revanche, pour un point de l'hémisphère sud, c'est tout l'inverse et ce sera le début de l'hiver. En particulier, le tropique du Cancer sera le lieu où l'ensoleillement est maximal, comme le montre la figure :



- **L'équinoxe de printemps et l'équinoxe d'automne** correspondent aux deux instants où la droite (OG) coupe l'équateur. Pour un point de l'équateur, jour et nuit ont exactement la même durée et pour les points des deux hémisphères, c'est l'instant où la différence entre les durées du jour et de la nuit sont les moins fortes.

- **Le solstice d'hiver** correspond à l'instant où la droite (OG) coupe le tropique du capricorne. C'est donc le jour où un point du globe situé dans l'hémisphère nord au-dessus de ce tropique recevra le minimum d'ensoleillement, où le soleil y attendra sa hauteur minimale au- dessus de l'horizon et où le jour y sera le plus court. Sur notre calendrier, ce temps advient au cours de la journée du 21 décembre 2022. En revanche, pour un point de l'hémisphère sud, c'est tout l'inverse et ce sera le début de l'été. En particulier, le tropique de Capricorne sera le lieu où l'ensoleillement est maximal, comme le montre la figure :



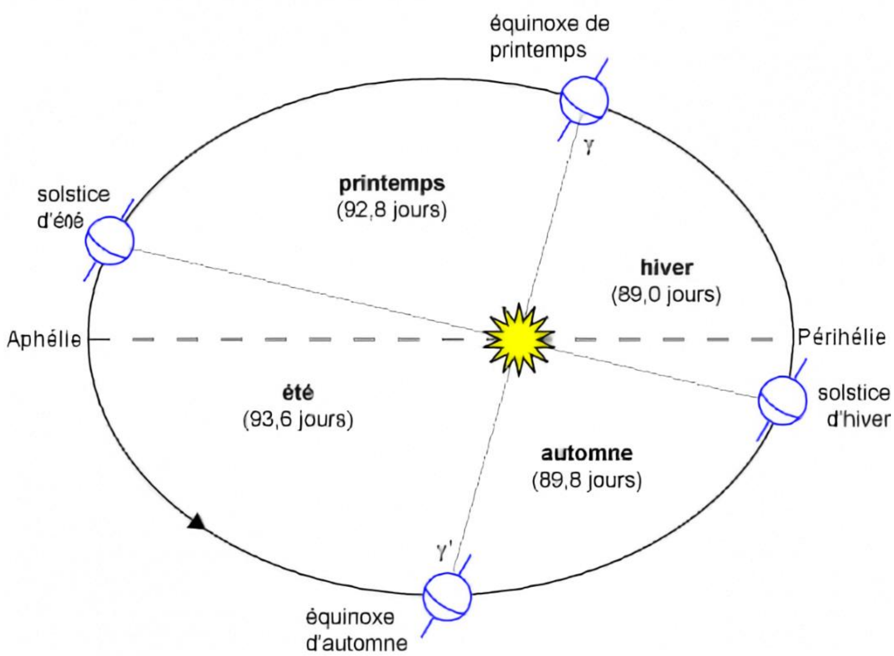
<u>Excentricité</u>

La forme de la trajectoire du centre de la Terre (en fait pour être plus précis du centre de gravité Terre-Lune) dans le plan de l'écliptique varie au cours des âges d'un cercle parfait à une ellipse sur une période d'environ 100 000 ans. L'excentricité est le paramètre qui décrit cette déformation. Plus elle est proche de 1 plus la trajectoire est proche d'une ellipse très aplatie et plus elle est proche de 0, plus la trajectoire est proche d'un cercle, ce qui est le cas aujourd'hui avec une excentricité qui vaut :

$$e = \frac{f}{a} = \frac{2,5}{149,6} = 0,0167$$

Précession des équinoxes :

La Terre tourne à la manière d'une toupie. En plus de tourner sur elle-même d'Ouest en Est autour de l'axe des pôle, son axe de rotation décrit un cône sur une période d'environ 25 000 ans. Ceci a pour conséquence que le solstice d'hiver ne correspond pas au point d'aphélie, c'est-à-dire quand la Terre est la plus éloignée du centre du Soleil à une distance de 152 millions de km environ, c'est plutôt même l'inverse, comme le montre la figure suivante, dont la forme en ellipse a été exagérée :

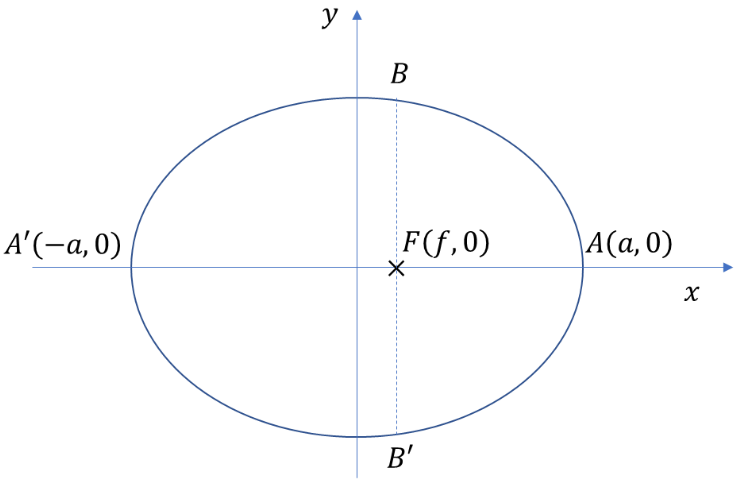


Il y a 11 000 ans environ cependant, le solstice d'hiver correspondait au point d'aphélie

III Durée des saisons :

Le début d'une saison est soit un solstice, soit une équinoxe et sa fin est respectivement soit une équinoxe, soit un solstice. Voyons comment la loi des aires permet d'expliquer que ces durées observées ne sont pas tout à fait égales, ce que l'on voit intuitivement sur la figure précédente.

Mais, afin de simplifier les calculs, nous nous placerons dans une situation pas très éloignée de celle qui prévaut actuellement, celle où le solstice d'été correspond au point d'aphélie A', le solstice d'hiver au point de périhélie A et les équinoxes aux points B et B'.



Rappelons la loi des aires ou loi de Képler : Pendant des durées égales, les aires balayées par le rayon reliant le centre F du soleil au centre de gravité du système Terre-Lune, sont égales. Notons alors Δt la durée en jours pour aller du point A au point B que nous appellerons durée de la saison d'hiver. Notons $\Delta t'$ la durée en jours pour aller du point A au point A' qui est donc la durée d'une demi année soit 182,5 jours (nous supposerons qu'une année a pour simplifier 365 jours , alors qu'en fait c'est plutôt 365,25 jours)

Alors, d'après la loi des aires, le quotient de Δt par $\Delta t'$ est égal au quotient de l'aire du secteur balayé par le rayon $[FM]$ de A à B par l'aire de la demi ellipse. Calculons ces aires :

Aire de la demi-ellipse :

Une équation cartésienne de la demi-ellipse supérieure est, dans le repère principal de l'ellipse (celui de la figure précédente) :

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Alors :

$$Aire1 = \int_{-a}^{a} y\, dx = \frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Faisons un changement de variable en posant :

$$x = a\, cos(\theta), \qquad dx = -a\, sin(\theta)\, d\theta$$

$$Aire1 = \frac{b}{a}\int_{\pi}^{0} \sqrt{a^2 - a^2\, cos^2(\theta)}\, (-a\, sin(\theta)\, d\theta) = \frac{b}{a}\int_{0}^{\pi} a^2\, sin^2(\theta)\, d\theta$$

$$= a\, b \int_{0}^{\pi} \frac{1 - cos(2\,\theta)}{2}\, d\theta$$

$$\boxed{\boldsymbol{Aire1 = \frac{\pi\, a\, b}{2}}}$$

Aire balayé de A à B :

$$Aire2 = \frac{b}{a}\int_{f}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx =$$

Même changement de variable où :

$$f = a\,cos(\theta) \text{ pour } \theta = cos^{-1}\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$Aire2 = a\,b \int_{0}^{cos^{-1}\left(\frac{f}{a}\right)} \frac{1 - cos(2\,\theta)}{2}\, d\theta = \frac{a\,b}{2}\left(cos^{-1}\left(\frac{f}{a}\right) - \frac{sin\left(2\,cos^{-1}\left(\frac{f}{a}\right)\right)}{2}\right)$$

$$= \frac{a\,b}{2}\left(cos^{-1}\left(\frac{f}{a}\right) - \frac{f}{a}\sqrt{1 - \frac{f^2}{a^2}}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{Aire2 = \frac{a\,b}{2}\left(cos^{-1}\left(\frac{f}{a}\right) - \frac{f}{a}\frac{b}{a}\right)}}$$

On peut donner que f est très petit devant a. On peut alors utiliser le développement limité de cos^{-1} au voisinage de 0 :

$$cos^{-1}(x) \approx \frac{\pi}{2} - x$$

Et en notant que $b \approx a$:

$$Aire2 \approx \frac{a\,b}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{f}{a} - \frac{f}{a}\frac{a}{a}\right) = \frac{\pi\,a\,b}{4} - \frac{a\,a}{2}\frac{2\,f}{a} = \frac{Aire1}{2} - a\,f$$

Or :

$$\frac{a\,f}{\frac{Aire1}{2}} = \frac{4\,a\,f}{\pi\,a\,b} \approx \frac{4\,f}{\pi\,a} = \frac{4 \times 2{,}5}{\pi \times 149{,}6} \approx 0.021 = 2{,}1\ \%$$

On a alors :

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{Aire2}{Aire1} = \frac{\frac{Aire1}{2} - 0{,}021\,\frac{Aire1}{2}}{Aire1} = \frac{0{,}979}{2}$$

Soit :

$$\Delta t = \frac{0{,}979 \times 182{,}5}{2} = 89{,}3\ jours$$

Nous pouvons donc prévoir les durées suivantes :

Entre solstice d'hiver et équinoxe de printemps ou bien équinoxe d'automne et solstice d'hiver : environ 89 jours.

Entre solstice d’été et équinoxe d’automne ou bien équinoxe de printemps et solstice d’été : environ 93 jours (182,5-89,3)

Comparons avec ce que donne le calendrier 2021-2022 :

Saison d’hiver : elle débute au solstice d’hiver le 21 décembre 2021 et se termine à l’équinoxe de printemps le 20 mars 2022. Comptons les jours de cette saison :

21 décembre au 31 décembre : 11 jours

janvier : 31 jours

février : 28 jours

1er mars au 19 mars : 19 jours

Total : 89 jours

Saison de printemps : elle débute à l’équinoxe de printemps le 20 mars 2022 et se termine au solstice d’été le 21 juin 2022. Comptons les jours de cette saison :

20 mars au 31 mars : 12 jours

avril : 30 jours

mai : 31 jours

1er juin au 20 juin : 20 jours

Total : 93 jours (en fait 92 jours 18 heures car les débuts de solstice ou d’équinoxe ne commencent pas à 0 heure du jour où ils sont indiqués).

Saison d’été : elle débute au solstice d’été le 21 juin et se termine à l’équinoxe d’automne le 23 septembre. Comptons les jours de cette saison :

21 juin au 30 juin : 10 jours

Juillet : 31 jours

Août : 31 jours

1er septembre au 22 septembre : 22 jours

Total : 94 jours (en fait 93 jours 15 heures)

Saison d’automne : elle débute à l’équinoxe d’automne le 23 septembre 2022 et se termine au solstice d’hiver le 21 juin 2022. Comptons les jours de cette saison :

23 septembre au 30 septembre : 8 jours

octobre : 31 jours

novembre : 30 jours

1er décembre au 20 décembre : 20 jours

Total : 89 jours (en fait 89 jours 21 heures)

Conclusions : Le calcul effectué avec des positions de solstice et d'équinoxes proches mais différentes de celles actuelles donne des valeurs très proches de celles observées aujourd'hui par les astronomes.

Lorsque, dans un grand nombre d'années, la trajectoire redeviendra circulaire, donc l'excentricité nulle, les saisons auront la même durée.

Le fait que le solstice d'hiver soit proche du point de périhélie fait que la durée de la saison froide dans l'hémisphère nord (automne-hiver) est de 178,8 jours alors celle de la saison chaude (printemps-été) est de 186,4 jours. Il n'en va pas de même dans l'hémisphère sud. Il y a 11 000 ans, c'était donc l'inverse. Les variations climatiques au cours des âges sont donc aussi une affaire de variation des caractéristiques du mouvement de la Terre dans le référentiel héliocentrique, par la variation des valeurs d'obliquité, d'excentricité et de précession des équinoxes.