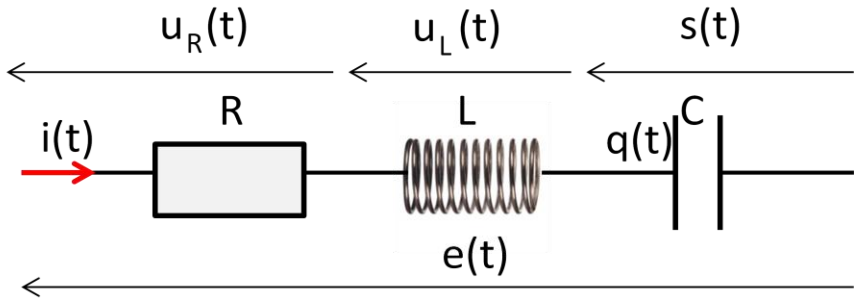
Réponses indicielles et impulsionnelles d'un circuit RLC

I Réponse impulsionnelle :

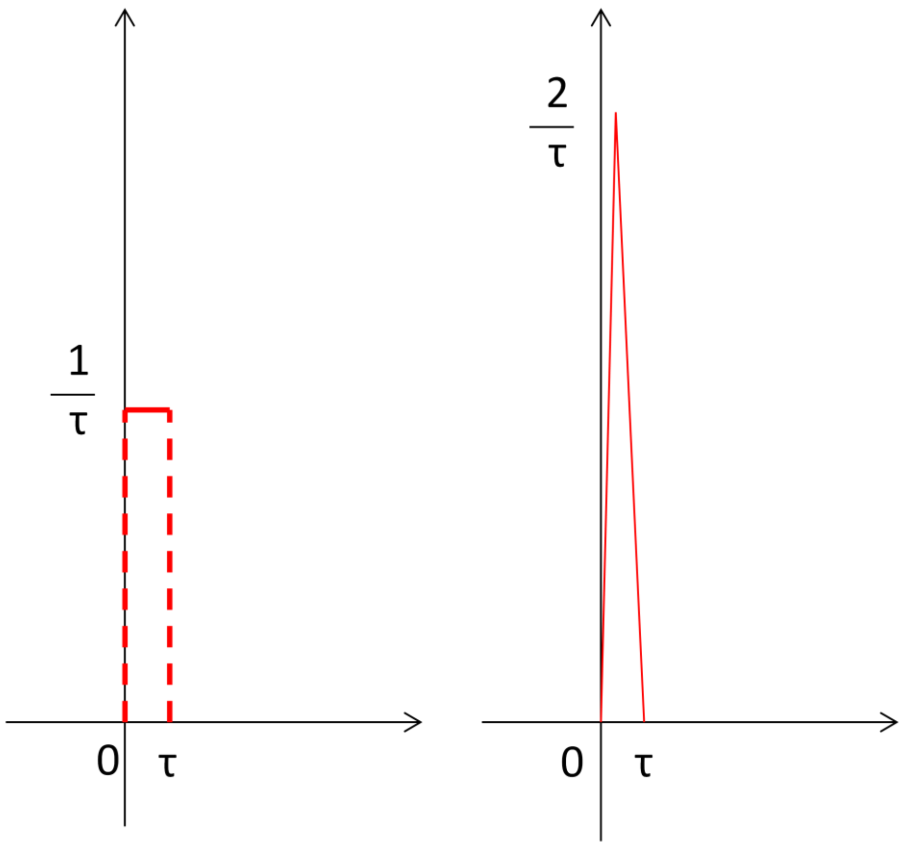
Etant donné un circuit RLC :



Nous allons nous intéresser à la tension s(t) aux bornes du condensateur donnée par le circuit et appelée **sortie**, si on lui applique une tension e(t) appelée **entrée**, très forte sur un très court laps de temps.

La forme de e(t) importe peu. L'essentiel est que la durée d'application de cette impulsion soit très courte d'un point de vue réel, ce qui simule une action de type choc sur le système.

En voici deux exemples, un pour lequel e(t) est discontinue et l'autre pour lequel elle est continue :



Afin d'obtenir la même réponse du système après l'application de cette impulsion, quelque soit sa forme, on peut démontrer mathématiquement qu'il faut que l'intégrale de cette impulsion sur sa durée d'application soit égale à 1.

Une telle impulsion est appelée **fonction de Dirac**. Pour les puristes, ce n'est pas tout à fait une fonction mais une famille de fonctions paramétrées par la durée d'impulsion τ.

La difficulté posée par le fait de devoir considérer une famille de fonctions au lieu d'une seule fonction et de devoir faire tendre le paramètre τ vers 0, a conduit au développement d'une théorie plus pratique : Celle des distributions. C'est à elle qu'il est fait allusion lorsqu'on parle de transformée de Laplace d'une fonction de Dirac. On devrait alors éliminer le mot fonction et parler de distribution de Dirac.

Par souci de simplification, nous ne parlerons pas de cette théorie des distributions

Par analogie avec le système mécanique masse-ressort, une force appliquée sous la forme d'une impulsion (type coup de marteau) provoquera une mise en mouvement du système sur un mode qualifié d'oscillations libres.

Dans le cas d'un système R L C, une réponse analogue pourrait être obtenue en ayant chargé préalablement l'inductance avec un courant initial, le condensateur étant quant à lui non chargé, comme nous allons le voir en passant à l'évaluation mathématique de ce problème.

Avec les notations du schéma, nous avons, par la loi d'additivité des tensions :

$$\boxed{u_R(t) + u_L(t) + s(t) = e(t)}$$

Relions alors les tensions à l'intensité i(t) dans le circuit et à la charge q(t) du condensateur :

$$\boxed{\begin{cases} R\,i(t) + L\,\dfrac{di}{dt}(t) + s(t) = e(t) \\ i(t) = \dfrac{dq}{dt}(t) = C\,\dfrac{ds}{dt}(t) \end{cases}}$$

Soit, en remplaçant i(t) par son expression en s(t) dans la première :

$$R\,C\,\frac{ds}{dt}(t) + L\,C\,\frac{d^2s}{dt^2}(t) + s(t) = e(t)$$

Soit après normalisation par division par L C :

$$\boxed{\frac{d^2s}{dt^2}(t) + \frac{R}{L}\frac{ds}{dt}(t) + \frac{1}{L\,C}s(t) = \frac{e(t)}{L\,C}}$$

Afin de mettre l'équation dans une forme standard mathématique bien connue, nous posons :

$$\boxed{2\,\lambda = \frac{R}{L} \quad \text{et} \quad {\omega_0}^2 = \frac{1}{L\,C}}$$

L'équation différentielle devient alors :

$$\boxed{\frac{d^2s}{dt^2}(t) + 2\,\lambda\frac{ds}{dt}(t) + {\omega_0}^2 s(t) = {\omega_0}^2 e(t)}$$

Dans le cas présent de la réponse impulsionnelle, nous avons :

$$e(t) = \frac{1}{\tau} \text{ sur } [0;\tau] \text{ et 0 en dehors}$$

Dans le cas où λ est inférieur à ω_0, la réponse s(t) est alors, sur $[0;\tau]$, de la forme (voir en Annexe) :

$$s(t) = e^{-\lambda t}\left(A\cos(\omega_P t) + B\sin(\omega_P t)\right) + \frac{1}{\tau}$$

avec :

$$\omega_P = \sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}$$

et l'intensité :

$$i(t) = C\,\frac{ds}{dt}(t) = C\,e^{-\lambda t}\left((\omega_P B - \lambda A)\cos(\omega_P t) + (-\omega_P A - \lambda B)\sin(\omega_P t)\right)$$

Or les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} s(0) = 0 & \text{(condensateur non chargé)} \\ i(0) = 0 & \text{(inductance non chargée)} \end{cases}$$

Nous en déduisons les valeurs de A et B :

$$\begin{cases} A = -\dfrac{1}{\tau} \\ B = \dfrac{\lambda A}{\omega_P} = -\dfrac{\lambda}{\omega_P \tau} \end{cases}$$

D'où

$$s(t) = \frac{1}{\tau}\left(1 - e^{-\lambda t}\left(\cos(\omega_P t) + \frac{\lambda}{\omega_P}\sin(\omega_P t)\right)\right)$$

Ne perdons pas du vue que τ est un temps très petit (infiniment petit en Mathématiques, ce qui revient à le faire tendre vers 0).

Nous pouvons alors considérer, au premier ordre en τ:

$$\cos(\omega_P\tau) \approx 1\ ;\ \sin(\omega_P\tau) \approx \omega_P\tau;\ e^{-\lambda\,\tau} \approx 1 - \lambda\,\tau$$

$$\boxed{s(\tau) \approx \frac{1}{\tau}\big(1 - (1 - \lambda\,\tau)\,(1 + \lambda\,\tau)\big) \approx \frac{(\lambda\,\tau)^2}{\tau} = \lambda^2\,\tau}$$

La tension aux bornes du condensateur, donc la charge, est alors quasi nulle juste après l'impulsion, ce qui est logique, le condensateur n'ayant pas eu le temps de se charger.

En revanche l'intensité n'est pas nulle. En effet :

$$\boxed{i(t) = C\,\frac{ds}{dt}(t) = C\,e^{-\lambda\,t}\left(\frac{\omega_P}{\tau} + \frac{\lambda^2}{\omega_P\,\tau}\right)\sin(\omega_P\,t) = C\,e^{-\lambda\,t}\,{\omega_0}^2\,\frac{\sin(\omega_P\,t)}{\omega_P\,\tau}}$$

Donc :

$$\boxed{i(\tau) = C\,e^{-\lambda\,\tau}\,{\omega_0}^2\,\frac{\sin(\omega_P\,\tau)}{\omega_P\,\tau} \approx C\,{\omega_0}^2}$$

τ étant très petit, nous écrirons désormais cette relation sous la forme :

$$\boxed{i(0^+) = C\,{\omega_0}^2}$$

La réponse s(t) du système pour $t > \tau$ que nous noterons $t > 0$ est donc la solution de l'équation différentielle d'ordre 2 précédente en mettant dans le second membre e(t) à 0 et en prenant pour conditions initiales :

$$\boxed{\begin{cases} s(0^+) = 0 \\ \dfrac{ds}{dt}(0^+) = {\omega_0}^2 \end{cases}}$$

C'est donc la solution correspondant aux oscillations libres du système.

Notez que dans l'analogie mécanique du système masse ressort, la réponse impulsionnelle serait la réponse en oscillations libres avec des conditions initiales du type, position x nulle et vitesse v fixée :

$$\begin{cases} x(0^+) = 0 \\ \dfrac{dx}{dt}(0^+) = v(0^+) = v_0 \end{cases}$$

Nous pouvons donc retenir :

La réponse impulsionnelle d'un circuit électrique ou d'un système mécanique est sa réponse en oscillations libres sous condition initiale d'intensité ou de vitesse imposée.

D'un point de vue de sens physique, c'est l'application de l'impulsion (qualifiée de fonction de Dirac) qui impose cette condition initiale (pensez au marteau qui frappe une masse au repos accrochée à un ressort)

D'ailleurs une technologie en est issue. Elle consiste à obtenir la réponse impulsionnelle d'une structure en la frappant avec un marteau de choc, qui enregistre la force exercée, tandis qu'un accéléromètre mesure la réponse en un point. Cela permet de connaître le spectre de réponse en une seule action au lieu d'utiliser un pot vibrant et devoir réaliser de nombreuses mesures à différentes fréquences.

Voyons donc maintenant quelle est cette réponse impulsionnelle, autrement dit, l'expression mathématique de s(t) pour $t > 0$.

Nous reprenons la solution de l'équation différentielle, mais avec $e(t) = 0$ cette fois ci et les conditions initiales précédentes. Il vient :

$$s(t) = e^{-\lambda\, t}\left(A\cos(\omega_P t) + B\sin(\omega_P t)\right)$$

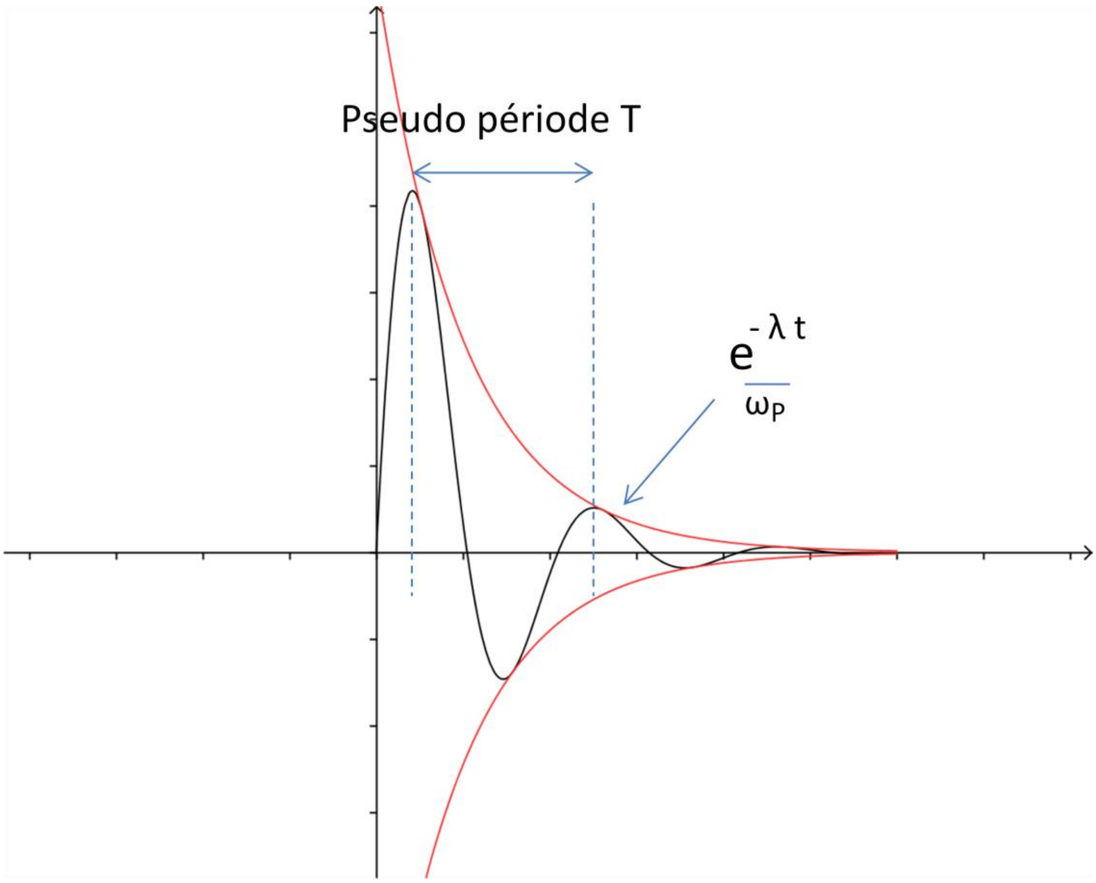
A et B se déduisent des conditions initiales :

$$\begin{cases} A = s(0^+) = 0 \\ \dfrac{ds}{dt}(0^+) = (\omega_P\, B - \lambda\, A)\,{\omega_0}^2 = {\omega_0}^2 \text{ soit } B = \dfrac{1}{\omega_P} \end{cases}$$

D'où :

$$s(t) = \frac{e^{-\lambda t} \sin(\omega_P t)}{\omega_P}$$

Nous reconnaissons une fonction oscillatoire amortie dont le graphique a l'allure suivante :



La période de la fonction sinus est appelée pseudo-période. Elle représente le durée entre deux pics consécutifs de s(t). Sa valeur est :

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega_P}$$

λ peut être interprétée physiquement en considérant le quotient de la valeur de s(t) à deux pics consécutifs :

$$\frac{s(t_i)}{s(t_{i+1})} = \frac{e^{-\lambda\, t_i}}{e^{-\lambda\, t_{i+1}}} = e^{\lambda\, T}$$

D'où, en prenant le logarithme népérien :

$$\boxed{\lambda = -\frac{\mathrm{Ln}\big(s(t_{i+1})\big) - \big(s(t_i)\big)}{t_{i+1} - t_i}}$$

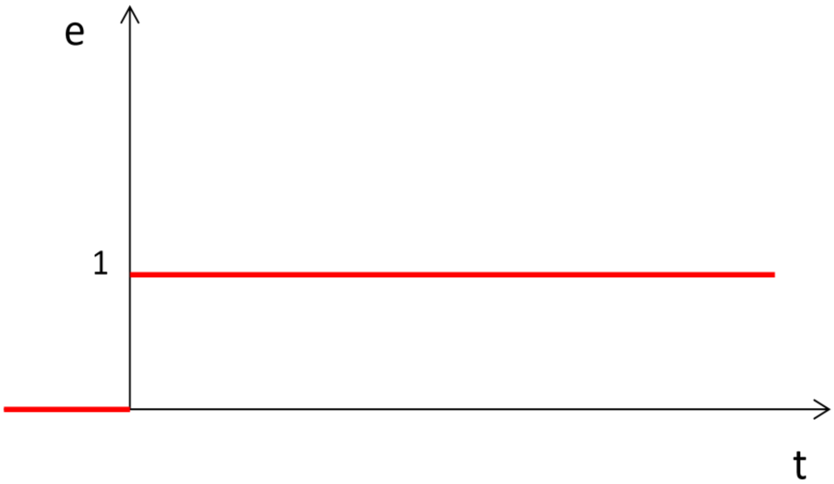
λ est de ce fait l'opposé du taux de variation du logarithme népérien de la réponse.

On l'appelle pour cette raison **décrément logarithmique**. Il traduit physiquement l'amortissement de la réponse.

Plus il est élevé, plus la réponse est amortie.

II <u>Réponse indicielle</u> :

Intéressons nous maintenant à la réponse s(t) du circuit RLC pour une entrée e(t) de valeur constante égale à 1 à partir de t= 0 :



Une telle fonction e(t) est appelée **échelon** ou **indice.**

Il y a peu de choses à changer par rapport à l'étude précédente dans l'intervalle de temps $[0;\tau]$. Il suffit de remplacer τ par 1. La réponse est de la forme :

$$\boxed{s(t) = e^{-\lambda t}\big(A\cos(\omega_P t) + B\sin(\omega_P t)\big) + 1}$$

et l'intensité :

$$i(t) = C\,\frac{ds}{dt}(t) = C\,e^{-\lambda\,t}\left((\omega_P B - \lambda\,A)\cos(\omega_P t) + \ (-\omega_P A - \lambda\,B)\sin(\omega_P t)\right)$$

Les conditions initiales sont cependant différentes cette fois ci car le circuit n'est « chargé » initialement ni en courant ni en charge donc :

$$\begin{cases} s(0^+) = 0 \\ i(0^+) = 0 \end{cases}$$

Nous en déduisons les valeurs de A et B :

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = \dfrac{\lambda\,A}{\omega_P} = -\dfrac{\lambda}{\omega_P} \end{cases}$$

D'où :

$$s(t) = 1 - \ e^{-\lambda\,t}\left(\cos(\omega_P t) - \frac{\lambda}{\omega_P}\ \sin(\omega_P t)\right)$$

Or :

$$\frac{\lambda}{\omega_P} = \frac{\lambda}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}} = \frac{\lambda}{\omega_0\sqrt{1 - \left(\dfrac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}}$$

Il apparaît alors intéressant d'introduire la grandeur adimensionnelle (prononcez ksi) :

$$\xi = \frac{\lambda}{\omega_0}$$

on a alors :

$$\frac{\lambda}{\omega_P} = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Et la réponse s'écrit :

$$s(t) = 1 - e^{-\lambda t} \left(\cos(\omega_P t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_P t) \right)$$

soit encore :

$$s(t) = 1 - \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left(\sqrt{1-\xi^2} \cos(\omega_P t) + \xi \sin(\omega_P t) \right)$$

Notons que :

$$\left(\sqrt{1-\xi^2}\right) + \xi^2 = 1$$

Nous pouvons donc poser, avec $\psi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{cases} \sin(\psi) = \sqrt{1-\xi^2} \\ \cos(\psi) = \quad \xi \end{cases}$$

Soit :

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right)$$

Compte tenu de la formule bien connue :

$$\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) = \sin(a+b)$$

Nous en déduisons :

$$s(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\,\omega_0\,t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_P t + \psi)$$

Analysons alors l'allure de cette fonction.

Pour cela, commençons par la dériver :

$$\frac{ds}{dt}(t) = -\frac{e^{-\xi\,\omega_0\,t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left(-\xi\,\omega_0 \sin(\omega_P t + \psi) + \omega_P \cos(\omega_P t + \psi) \right)$$

Soit compte tenu de :

$$\omega_P = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$$

$$\frac{ds}{dt}(t) = \frac{\omega_0\, e^{-\xi\,\omega_0\, t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\big(\cos(\psi)\sin(\omega_P t+\psi) - \sin(\psi)\ \cos(\omega_P t+\psi)\big)$$

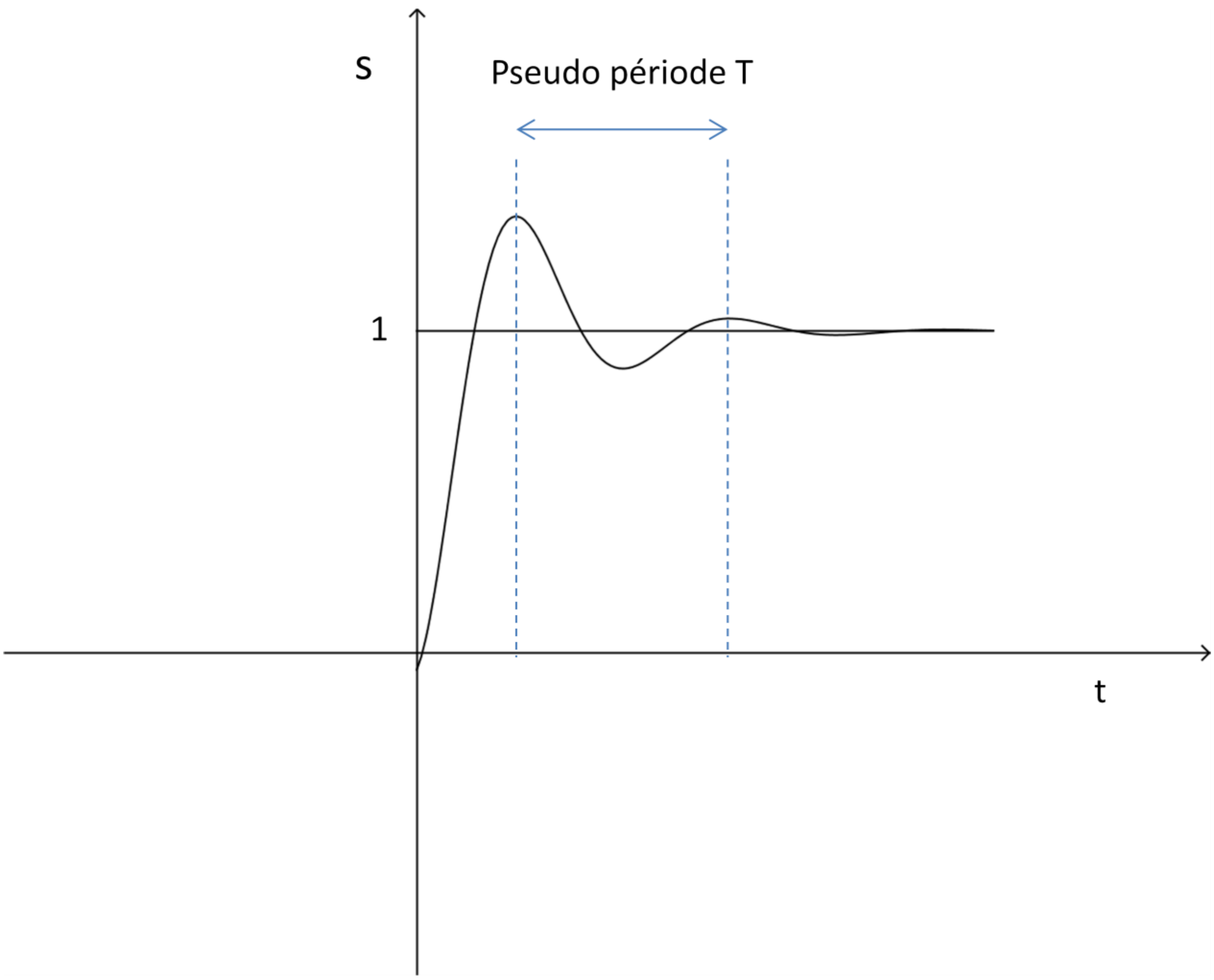
Finalement :

$$\boxed{\frac{ds}{dt}(t) = \frac{\omega_0\, e^{-\xi\,\omega_0\, t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_P t)}$$

Nous en déduisons les variations de s(t) par le signe de sa dérivée sur une pseudo période T :

t	0		$\frac{\pi}{\omega_P}$		$\frac{\pi}{2\,\omega}$
$\frac{ds}{dt}(t)$	0	+	0	–	0
s(t)		Strictement croissante		Strictement décroissante	

L'allure est donc la suivante :



Un premier pic a donc lieu à l'instant :

$$\boxed{t_1 = \frac{\pi}{\omega_P} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Compte tenu de :

$$\sin(\pi+\psi) = -\sin(\psi) = -\sqrt{1-\xi^2}$$

La valeur limite de s(t) quand le temps devient infini étant 1, l'amplitude du dépassement de cette valeur limite au premier pic est :

$$\boxed{D_1 = -\frac{e^{-\xi\,\omega_0\,t_1}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_P t_1+\psi) = -\frac{e^{-\frac{\xi\,\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\pi+\psi) = e^{-\frac{\xi\,\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$

Evaluons maintenant le temps nécessaire pour avoir atteint 95% de la valeur limite, ce que l'on peut appeler temps de réponse à 5% signifiant par là même que nous sommes après ce temps à moins de 5% de la valeur limite.

Nous supposerons pour cela cette valeur atteinte en un pic, donc une valeur de sinus égale à 1.

Nous avons alors à résoudre :

$$1-\frac{e^{-\xi\,\omega_0\,t}}{\sqrt{1-\xi^2}}=0{,}95$$

Soit :

$$e^{-\xi\,\omega_0\,t}=0{,}05\,\sqrt{1-\xi^2}$$

Et en prenant le logarithme népérien :

$$\boxed{t=\frac{\mathrm{Ln}\left(0{,}05\,\sqrt{1-\xi^2}\right)}{\xi\,\omega_0}}$$

Intérêt de ces grandeurs :

La réponse indicielle peut généralement être obtenue par voie expérimentale.

La courbe de s(t) étant connue, on peut y lire facilement D_1 et t_1.

Le premier permettra d'évaluer ξ et le second ω_0, ce qui permet d'évaluer λ et donc certaines caractéristiques du circuit.

III <u>Utilisation de la transformation de Laplace</u> :

Pour calculer les réponses impulsionnelles ou indicielles, il est avantageux d'utiliser la transformation de Laplace.

Cette transformation porte sur des fonctions nulles pour $t< 0$, qualifiées de **fonctions causales**.

Ce sont précisément celles que l'on retrouve en physique en choisissant convenablement l'origine des temps.

Le principe est de calculer une sorte de « produit scalaire » sur un jeu de fonctions de comparaison de la forme :

$$g(t) = e^{-\lambda\, t}(A \cos(\omega\, t) + B \sin(\omega\, t))$$

Soit, compte tenu des relations d'Euler :

$$\boxed{\cos(\omega\, t) = \frac{e^{j\,\omega t} + e^{-j\,\omega t}}{2} \quad \text{et} \quad \cos(\omega\, t) = \frac{e^{j\,\omega t} - e^{-j\,\omega t}}{2\,j}}$$

$$\boxed{g(t) = C\, e^{-\,(\lambda + j\omega)\,t} + D\, e^{-\,(\lambda - j\omega)\,t}}$$

avec C et D constantes complexes.

Il est donc judicieux de comparer s(t) aux fonctions de la forme :

$$\boxed{g(t) = e^{-\,p\,t}}$$

où p est un nombre complexe de la forme $\lambda + j\omega$ ou $\lambda - j\omega$, donc à partie réelle $\lambda > 0$.

La transformation de Laplace d'une fonction causale s(t) est alors en quelque sorte, un produit scalaire de cette fonction avec une fonction de comparaison causale et de la forme $e^{-\,p\,t}$ sur le domaine $t > 0$.

Elle s'exprime en une fonction complexe notée S(p) définie par :

$$\boxed{S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-\,p\,t}\, dt}$$

Cette transformation revêt de multiples propriétés la plupart très faciles à démontrer, je vous renvoie à l'annexe pour celles utilisées ici.

Appliquons cette transformation à l'équation différentielle du second ordre régissant la réponde indicielle ($e(t) = 1$ si $t > 0$, 0 sinon):

$$\boxed{\frac{d^2 s}{dt^2}(t) + 2\,\lambda \frac{ds}{dt}(t) + {\omega_0}^2 s(t) = {\omega_0}^2 e(t)}$$

Il vient :

$$\boxed{p^2 S(p) + 2\,\lambda\,p\,S(p) + {\omega_0}^2 S(p) = {\omega_0}^2 E(p)}$$

Or la transformée de Laplace de l'échelon est :

$$\boxed{E(p) = \frac{1}{p}}$$

Nous en déduisons :

$$\boxed{S(p) = \frac{{\omega_0}^2}{p\,(p^2 + 2\,\lambda\,p + {\omega_0}^2)} = \frac{1}{p\,\left(\frac{p^2}{{\omega_0}^2} + \frac{2\,\xi}{\omega_0}\,p + 1\right)}}$$

Il est à noter la rapidité avec laquelle la transformation de Laplace est obtenue.

L'étape suivante consiste à décomposer cette transformée en sommes de transformées de fonctions causales de référence.

Il nous faut pour cela réaliser une décomposition en éléments simples :

$$\boxed{\frac{1}{p\,\left(\frac{p^2}{{\omega_0}^2} + \frac{2\,\xi}{\omega_0}\,p + 1\right)} = \frac{a}{p} + \frac{b\,p + c}{\frac{p^2}{{\omega_0}^2} + \frac{2\,\xi}{\omega_0}\,p + 1}}$$

En multipliant les deux membres par p et en faisant tendre p vers 0, on obtient :

$$a = 1$$

En faisant ensuite tendre p pris comme réel, vers $+\infty$, on a :

$$a + b\,{\omega_0}^2 = 0 \quad \text{soit} \quad b = -\frac{1}{{\omega_0}^2}$$

Finalement, en prenant $p = -\omega_0$:

$$\frac{1}{\omega_0\,\left(\frac{{\omega_0}^2}{{\omega_0}^2} + \frac{2\,\xi}{\omega_0}\,\omega_0 + 1\right)} = \frac{1}{\omega_0} + \frac{b\,\omega_0 + c}{\frac{{\omega_0}^2}{{\omega_0}^2} + \frac{2\,\xi}{\omega_0}\,\omega_0 + 1}$$

Par simplification et résolution, on trouve :

$$c = -\frac{2\,\xi}{\omega_0}$$

D'où la décomposition :

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{\frac{p}{{\omega_0}^2} + \frac{2\,\xi}{\omega_0}}{\frac{p^2}{{\omega_0}^2} + \frac{2\,\xi}{\omega_0}\,p + 1}$$

$$\boxed{S(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 2\,\xi\,\omega_0\,p + {\omega_0}^2} - \frac{2\,\xi\;\omega_0}{p^2 + 2\,\xi\,\omega_0\,p + {\omega_0}^2}}$$

Mettons alors le polynôme du second degré sous forme canonique :

$$p^2 + 2\,\xi\,\omega_0\,p + {\omega_0}^2 = (p + \omega_0\,\xi)^2 - (\omega_0\,\xi)^2 + {\omega_0}^2$$

Soit :

$$\boxed{p^2 + 2\,\xi\,\omega_0\,p + {\omega_0}^2 = (p + \omega_0\,\xi)^2 + {\omega_0}^2(1 - \xi^2) = (p + \omega_0\,\xi)^2 + {\omega_P}^2}$$

On a alors :

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{p + \xi\,\omega_0}{(p + \xi\,\omega_0)^2 + {\omega_P}^2} - \frac{\xi\;\omega_0}{(p + \xi\,\omega_0)^2 + {\omega_P}^2}$$

S(p) est alors la transformée de Laplace de la fonction causale :

$$\boxed{s(t) = 1 - e^{-\xi\,\omega_0\,t}\cos(\omega_P t) - e^{-\xi\,\omega_0\,t}\,\frac{\xi\;\omega_0}{\omega_P}\,\sin(\omega_P t)}$$

soit :

$$\boxed{s(t) = 1 - e^{-\lambda\,t}\left(\cos(\omega_P t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\sin(\omega_P t)\right)}$$

On retrouve bien l'expression obtenue par résolution directe de l'équation différentielle.

Il y a cependant un point de Mathématiques qu'il faudrait résoudre en toute rigueur : Pourrait il y avoir une autre fonction s(t) qui aurait la même transformation de Laplace.

La réponse, non démontrée ici, car cela demande un long cheminement est : Deux fonctions continues sur $[0\,;+\infty[$ ayant même transformée de Laplace sur un domaine complexe de la forme $\mathrm{Re}(p) > a > 0$ sont égales.

Ce sera largement suffisant pour le moment.

Nous venons de voir que la transformation de Laplace était un outil commode pour résoudre des équations différentielles faisant intervenir des fonctions causales.

Cependant, lorsqu'on s'intéresse aux seuls régimes permanents et donc pas à la phase transitoire qui les précède, on lui préfère la transformée de Fourier, ce qui est généralement le cas en Mécanique alors qu'en électricité ou électronique, les régimes transitoires présentent un intérêt, le temps caractéristique pour atteindre le régime permanent étant une information utile.

III Annexe : Transformées de Laplace

Voyons tout d'abord la transformée de Laplace de quelques fonctions de référence :

Transformée d'une fonction de Dirac :

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\tau} \quad \text{sur } [0;\tau] \quad \text{et } \ 0 \ \text{ sinon}}$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-p\,t}\,dt = \int_0^{\tau} \frac{1}{\tau} e^{-p\,t}\,dt = \frac{1}{\tau}\left[\frac{e^{-p\,t}}{-p}\right]_0^{\tau} = \frac{1 - e^{-p\,\tau}}{p\,\tau}$$

Soit en faisant tendre τ vers 0 :

$$\boxed{F(p) = 1}$$

Transformée d'un échelon :

$$\boxed{f(t) = 1 \quad \text{sur } [0\,;+\infty[\quad \text{et } 0 \ \text{sinon}}$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-p\,t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-p\,t}\,dt = \left[\frac{e^{-p\,t}}{-p}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

Soit :

$$\boxed{F(p) = \frac{1}{p}}$$

Transformée d'une fonction sinusoïdale :

Partons de

$$f(t) = e^{j\,\omega\,t} \quad \text{sur } [0\,;+\infty[\quad \text{et } 0 \ \text{sinon}$$

$$g(t) = e^{-j\,\omega\,t} \quad \text{sur } [0\,;+\infty[\quad \text{et } 0 \ \text{sinon}$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-p\,t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(-p + j\,\omega)\,t}\,dt = \left[\frac{e^{(-p+j\,\omega)\,t}}{-p + j\,\omega}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p - j\,\omega}$$

$$G(p) = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-p\,t}\,dt = \frac{1}{p + j\,\omega}$$

Nous en déduisons pour :

$$h(t) = \cos(\omega\ t)\ \text{ sur } [0\,;+\infty[\quad \text{et } 0 \text{ sinon}$$

$$k(t) = \sin(\omega\ t)\ \text{ sur } [0\,;+\infty[\quad \text{et } 0 \text{ sinon}$$

en notant que :

$$h(t) = \frac{f(t) + g(t)}{2}$$

$$k(t) = \frac{f(t) - g(t)}{2\ i}$$

$$H(p) = \frac{F(p) + G(p)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - j\ \omega} + \frac{1}{p + j\ \omega}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$K(p) = \frac{F(p) - G(p)}{2\ i} = \frac{1}{2\ i}\left(\frac{1}{p - j\ \omega} - \frac{1}{p + j\ \omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

<u>Transformée d'une fonction exponentielle</u>:

$$f(t) = e^{-a\ t}\ \text{ sur } [0\,;+\infty[\quad \text{et } 0 \text{ sinon}$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\,p\,t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(-a-p)\,t}\, dt = \left[\frac{e^{(-a-p)\,t}}{-a-p}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p+a}$$

Soit en faisant tendre τ vers 0 :

$$F(p) = \frac{1}{p + a}$$

Voyons maintenant quelques propriétés de la transformées de Laplace :

Transformée d'une fonction multipliée par une exponentielle :

$$\boxed{f(t) = e^{-a\ t}\,g(t) \text{ sur } [0\,; +\infty[\quad \text{et } 0 \text{ sinon et g fonction causale}}$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-a\ t}\,g(t)e^{-\,p\,t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)\,t}\,g(t)dt$$

Soit :

$$\boxed{F(p) = G(p+a)}$$

Ainsi pour :

$$\boxed{\begin{gathered} f(t) = e^{-a\ t}\cos(\omega\ t) \text{ sur } [0\,; +\infty[\quad \text{et } 0 \text{ sinon} \\ F(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2} \end{gathered}}$$

Et pour :

$$\boxed{\begin{gathered} f(t) = e^{-a\ t}\sin(\omega\ t) \text{ sur } [0\,; +\infty[\text{ et } 0 \text{ sinon} \\ F(p) = \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2} \end{gathered}}$$

Transformée d'une dérivée :

Etant donnée une fonction causale f dérivable sur $[0\,; +\infty[$ et g sa dérivée. Alors, par intégration par partie :

$$G(p) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-\,p\,t}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-\,p\,t}dt$$

$$= [f(t)\,e^{-p\,t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-p\,e^{-\,p\,t})\,dt$$

$$= \lim_{t \to 0^+} f(t) + p \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-\,p\,t}\, dt$$

Soit :

$$\boxed{G(p) = f(0^+) + p\,F(p)}$$

On déduit, si f est deux fois dérivable sur $[0\,;+\infty[$, en notant $h = f''$:

$$\boxed{H(p) = g(0^+) + p\,G(p) = f'(0^+) + p\,f(0^+) + p^2\,F(p)}$$

Un cas particulier important est celui pour lequel :

$$f'(0^+) = f(0^+) = 0$$

on a alors :

$$\boxed{G(p) = p\,F(p) \quad \text{et} \quad H(p) = p^2\,F(p)}$$