Relativité

Nous allons montrer comment on peut aboutir aux formules de l'énergie, notamment la célèbre formule d'Einstein $E = m\ c^2$, et de la dynamique relativiste en cherchant un modèle où une particule ne pourrait aller plus vite que la lumière. Nous rappellerons au préalable les formules définies par Newton.

CHAPITRE I : Les formules de Newton

Relation fondamentale de la dynamique selon Newton

Nous nous placerons dans le cas simple d'une particule soumise à une force $\vec{F} = F\,\vec{i}$ le long d'un axe $(O, \vec{i}\,)$ sur lequel elle peut se déplacer. C'est par exemple le cas d'un électron qui entre dans l'espace situé entre deux plaques de condensateurs avec un vecteur vitesse initial orthogonal aux plaques.

Si nous désignons par la lettre a la composante sur le vecteur $\vec{i}$ du vecteur accélération $\vec{a}$ de la particule et m sa masse, la relation fondamentale de la dynamique établie par newton s'écrit :

$$\boxed{F = m\,a \quad \text{avec} \quad a = \frac{dv}{dt}}$$

Soit encore :

$$\boxed{F = \frac{dp}{dt} \quad \text{avec} \quad p = m\,v}$$

p est appelée quantité de mouvement et joue un rôle essentiel dans la dynamique des chocs des particules. En effet, considérons une particule 1 (un proton par exemple) de quantité de mouvement p_1 interagissant avec une particule 2 (un autre proton) de quantité de mouvement p_2. Supposons les deux particules se dirigeant l'une vers l'autre sur l'axe $(O, \vec{i}\,)$, la première exerçant sur la deuxième une force F_{12} et la seconde sur la première une force F_{21}. Nous avons alors :

Par le principe de l'action et de la réaction : $F_{21} + F_{12} = 0$

Par la relation dynamique de Newton :

$$F_{21} = \frac{dp_1}{dt} \text{ et } F_{12} = \frac{dp_2}{dt}$$

Nous en déduisons :

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = 0$$

Soit :

$$p_1 + p_2 = \text{constante}$$

Ce point est est essentiel, il traduit que la quantité de mouvement totale, somme des quantités de mouvement des particules qui interagissent, se conserve au cours du temps si celles si ne sont soumises à aucune autre force extérieure à leur système. Ceci conduira plus tard à attribuer une quantité de mouvement au photon, nous verrons comment.

Version énergétique de la relation fondamentale

Multiplions la relation fondamentale par la vitesse v :

$$F\ v = m\ v\ \frac{dv}{dt}$$

Soit encore :

$$F\ v = \frac{dE_c}{dt} \text{ avec } E_c = \frac{1}{2}\ m\ v^2$$

La quantité E_c est appelée énergie cinétique de la particule, et la relation ci-dessus est la formulation différentielle du théorème de l'énergie cinétique. La quantité F v est appelée puissance de la force F, c'est également le travail de la force F par unité de temps (seconde).

Si on intègre la relation précédente entre deux instants t_1 et t_2 on obtient la formulation intégrale du théorème de l'énergie cinétique :

$$\int_{t_0}^{t_1} F\ v\ dt = E_c(t_1) - E_c(t_0)$$

La quantité à gauche de la relation s'appelle travail de F entre les instants t_0 et t_1, la quantité de droite est la variation de l'énergie cinétique de la particule entre les mêmes instants.

Inconvénient philosophique de la formule de Newton

Imaginons que nous puissions exercer une force constante sur une particule de masse m à partir d'un instant initial $t = 0$ où la particule est au repos ($v = 0$). L'intégration de la relation de la dynamique selon Newton conduit à :

$$v = \frac{F}{m}\ t$$

La vitesse croît donc indéfiniment, ce qui peut sembler étrange d'un point de vue philosophique.

Adoptons alors l'intuition d'Einstein, selon laquelle une particule ne peut augmenter sa vitesse indéfiniment et postulons qu'elle ne peut dépasser la vitesse de la lumière dans le vide c = 299 792 458 m/s.

Cherchons alors une formule qui permette à l'énergie cinétique de la particule acquise par le travail d'une force F de croître indéfiniment alors que la vitesse de la particule tend vers la vitesse de la lumière et qui redonne la formule de l'énergie cinétique de Newton lorsque la vitesse de la particule est faible devant celle de la lumière.

Notons d'abord que la formule de Newton peut s'écrire :

$$E_c = \frac{1}{2}\ m\ c^2\ \frac{v^2}{c^2}$$

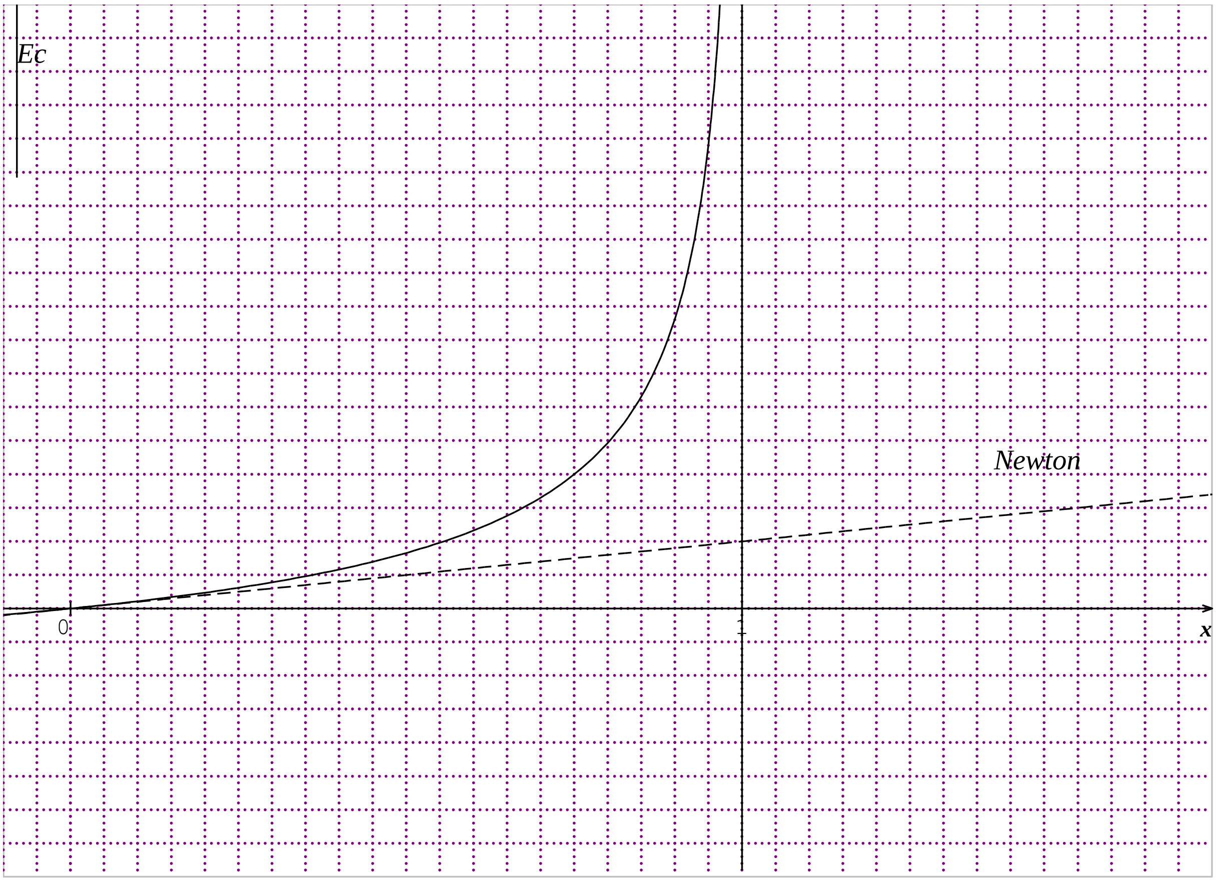
Cette formule présente l'avantage de faire apparaître une variable x sans dimension et comprise entre 0 et 1 définie par :

$$x = \frac{v^2}{c^2}$$

Le problème se pose alors ainsi en termes mathématiques : Trouver une fonction $E_c(x)$ définie et strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$ nulle en 0 et tendant vers l'infini en 1 et dont l'approximation tangente en 0 est :

$$E_c = \frac{1}{2} \, m \, c^2 \, x$$

Autrement dit , le graphe de E_c en fonction de x doit avoir l'allure suivante :



Une modélisation simple consiste à chercher une fonction de la forme :

$$E_c = k \left(\frac{1}{(1-x)^{\alpha}} - 1 \right)$$

k et α étant deux constantes positives à déterminer, de telle sorte que l'on retrouve l'expression de Newton losque x est petit devant 1.

Notons f(x) la fonction précédente et rappelons que l'approximation tangente en 0 de f est la fonction g définie par :

$$\boxed{g(x) = f'(0)\, x + f(0)}$$

Or :

$$\boxed{f'(x) = k \quad \frac{\alpha}{(1-x)^{\alpha+1}}}$$

Donc :

$$f'(0) = k\,\alpha \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

D'où :

$$g(x) = \alpha\, k\, x$$

Or nous devons avoir :

$$g(x) = \frac{1}{2}\, m\, c^2\, x$$

Or α ne doit pas dépendre de la masse de la particule, ceci suggère de prendre:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad k = m\, c^2}$$

L 'expression de l'énergie cinétique deviant alors :

$$\boxed{E_c = m\, c^2 \left(\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right)}$$

Soit finalement :

$$\boxed{E_c = (\gamma - 1) m\, c^2 \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Rappelons que dans la théorie de Newton, une particule a une énergie mécanique, somme d'une énergie potentielle et d'une énergie cinétique. Il est donc sensé de penser qu'une particule au repos puisse avoir une énergie potentielle. En réécrivant la formule précédente sous la forme :

$$\boxed{E_c + m\, c^2 = \gamma\, m\, c^2}$$

Nous sommes amenés à considérer la quantité $m\,c^2$ comme étant l'énergie au repos de la particule et la quantité $\gamma\,m\,c^2$ comme étant son énergie totale.

Nous avons ainsi la formule d'Einstein donnant l'énergie totale d'une particule :

$$\boxed{E = \gamma\,m\,c^2}$$

Lorsque la vitesse de la particule est nulle cette énergie est l'énergie au repos.

Nous allons pouvoir maintenant en déduire la relation fondamentale de la dynamique d'une particule selon Einstein, relation qui étend celle de Newton à des particules ayant des vitesses non négligeables devant celle de la lumière.

Relation fondamentale de la dynamique selon Einstein

Nous allons la déduire de la formulation différentielle liant l'énergie et la force en notant que l'énergie totale E et l'énergie cinétique E_c ont même dérivée par rapport au temps.

$$\boxed{F\,v = \frac{dE}{dt} \text{ avec } E = \gamma\,m\,c^2}$$

Or

$$\frac{dE}{dt} = m\,c^2\,\frac{d\gamma}{dt}$$

et

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}-1}\left(-2\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}$$

D'où :

$$F\,v = m\,c^2\gamma^3\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}$$

Soit en simplifiant :

$$\boxed{F = m\,\gamma^3 \frac{dv}{dt}}$$

Or :

$$\frac{d(\gamma\, m\, v)}{dt} = m \left(\frac{d\gamma}{dt}\, v + \gamma \frac{dv}{dt}\right)$$

$$= m \left(\gamma^3 \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt}\, v + \gamma \frac{dv}{dt}\right)$$

$$= m \left(\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} + 1\right) \gamma\, \frac{dv}{dt}$$

$$= m \left(\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} + 1\right) \gamma\, \frac{dv}{dt}$$

Soit en notant que :

$$\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$$

$$\boxed{\frac{d(\gamma\, m\, v)}{dt} = m\,\gamma^3 \frac{dv}{dt}}$$

Finalement :

$$\boxed{F = \frac{d(\gamma\, m\, v)}{dt}}$$

Ceci est la relation fondamentale de la dynamique selon la vision relativiste d'Albert Einstein.

Il est alors logique de qualifier la quantité $\gamma\, m\, v$ de quantité de mouvement. On peut également qualifier la quantité $\gamma\, m$ de masse inertielle, la quantité m étant la masse au repos. Noter que la masse inertielle est égale à la masse au repos lorsque $v = 0$ sinon elle lui est strictement supérieure.

En notant m_i la masse inertielle, les formules d'Einstein se réécrivent :

$$F = \frac{d(m_i\, v)}{dt}$$

$$E = m_i\, c^2$$

L'interprétation est alors plus intuitive : lorsqu'une force constante agit sur une particule, son effet est d'augmenter la quantité de mouvement $m_i\, v$. Mais tant que la vitesse reste négligeable devant celle de la lumière, la masse inertielle peut être considérée comme constante et de ce fait l'effet de F est d'augmenter la vitesse donc de produire de l'accélération, puis au fur et à mesure que la vitesse se rapproche de celle de la lumière, l'effet de F se traduit par une augmentation de plus en plus grande de masse inertielle et de moins en moins grande de vitesse. A la limite, quand la vitesse est proche de celle de la lumière, la vitesse ne varie quasiment plus et l'effet de la force est d'augmenter la masse inertielle de la particule.

Pour prendre une image, c'est en peu comme si , en poussant une souris dans l'espace, celle-ci nous semblait grossir au fur et à mesure qu'elle prenait de la vitesse, notre travail lui conférant une énergie de masse $m_i\, c^2$

Relation entre énergie totale et quantité de mouvement

Nous avons pour l'énergie :

$$E^2 = \gamma^2\, m^2\, c^4$$

Et pour la quantité de mouvement :

$$p^2 = \gamma^2\, m^2\, v^2 = \gamma^2\, m^2 c^2 \frac{v^2}{c^2}$$

Donc :

$$E^2 - p^2 c^2 = \gamma^2\, m^2\, c^4\, (1 - \frac{v^2}{c^2})$$

D'où

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2\, c^4$$

Cette formule est extrêmement utile pour attribuer au photon une quantité de mouvement sachant que la masse d'un photon est supposée nulle et que l'énergie d'un photon est définie par la formule d'Einstein :

$$\boxed{E = h\,\nu}$$

Où h est la constante de Planck et ν la fréquence du photon.

Par comparaison avec la précédente formule , il vient :

$$E = p\,c = h\,\nu$$

D'où la quantité de mouvement associé à un photon de fréquence

$$\boxed{p = \frac{h\,\nu}{c}}$$