Règle de L'hospital généralisée :

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[b;+\infty[$ avec $g' > 0$ et telles que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$$

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Preuve :

1er Cas : $L \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $c \in [b;+\infty[$ tel que :

$$x > c \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

L'application du théorème des accroissements finis généralisés sur l'intervalle $[x;t]$ permet d'écrire qu'il existe $d(x,t) \in]x;t[$ tel que :

$$\frac{f(t)-f(x)}{g(t)-g(x)} = \frac{f'(d(x,t))}{g'(d(x,t))}$$

Donc :

$$t > x > c \Rightarrow \left|\frac{f'(d(x,t))}{g'(d(x,t))} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left|\frac{f(t)-f(x)}{g(t)-g(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Par passage à la limite dans la deuxième inégalité en faisant tendre t vers $+\infty$, on en déduit :

$$x > c \Rightarrow \left|\frac{0-f(x)}{0-g(x)} - L\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

2ème Cas : $L \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $c \in [b;+\infty[$ tel que :

$$x > c \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

L'application du théorème des accroissements finis généralisés sur l'intervalle $[c;x]$ permet d'écrire qu'il existe $d(x,c) \in]x;t[$ tel que :

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f'(d(x,c))}{g'(d(x,c))}$$

Donc :

$$x > c \Rightarrow \left|\frac{f'(d(x,c))}{g'(d(x,c))} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$x > c \Rightarrow \left(g(x) - g(c)\right)\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right) < f(x) - f(c) < \left(g(x) - g(c)\right)\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$x > c \Rightarrow \frac{f(c) + \left(g(x) - g(c)\right)\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{f(c) + \left(g(x) - g(c)\right)\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{g(x)}$$

Or, quand x tend vers $+\infty$ le minorant de $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $L - \frac{\varepsilon}{2}$ et le majorant vers $L + \frac{\varepsilon}{2}$

Donc, il existe $d > c$ tel que :

$$x > d \Rightarrow L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon$$

Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

<u>3ème cas</u> : $L = \pm\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Traitons le cas $L = +\infty$, le cas $L = -\infty$ se traitant de façon analogue.

Soit $A > 0$ alors il existe $c \in [b; +\infty[$ tel que :

$$x > c \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} > 2\,A$$

L'application du théorème des accroissements finis généralisés sur l'intervalle $[x; t]$ permet d'écrire qu'il existe $d(x,t) \in]x; t[$ tel que :

$$\frac{f(t) - f(x)}{g(t) - g(x)} = \frac{f'(d(x,t))}{g'(d(x,t))}$$

Donc :

$$t > x > c \Rightarrow \frac{f'(d(x,t))}{g'(d(x,t))} > 2\,A \Rightarrow \frac{f(t) - f(x)}{g(t) - g(x)} > 2\,A$$

Par passage à la limite dans la deuxième inégalité en faisant tendre t vers $+\infty$, on en déduit :

$$x > c \Rightarrow \frac{0 - f(x)}{0 - g(x)} \geq 2\,A \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > A$$

Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

<u>4ème Cas</u> : $L = \pm\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Traitons là encore le cas $L = +\infty$

Soit $A > 0$ alors il existe $c \in [b; +\infty[$ tel que :

$$x > c \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} > 2\,A$$

L'application du théorème des accroissements finis généralisés sur l'intervalle $[c; x]$ permet d'écrire qu'il existe $d(x, t) \in]x; t[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(d(x,c))}{g'(d(x,c))}$$

Donc :

$$x > c \Rightarrow \frac{f'(d(x,c))}{g'(d(x,c))} > 2\,A \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} > 2\,A$$

$$x > c \Rightarrow\ f(x) - f(c) > 2\,A\left(\,g(x) - g(c)\right)$$

$$x > c \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(c) + 2\,A\left(\,g(x) - g(c)\right)}{g(x)}$$

Or, quand x tend vers $+\infty$ le minorant de $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $2\,A$.

Donc, il existe $d > c$ tel que :

$$x > d \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \geq 2\,A > A$$

Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$