Formes quadratiques hermitiennes

Nous allons aborder la notion de formes quadratiques hermitiennes en tant qu'extension de la notion de formes quadratiques réelles et à partir du concept de norme quadratique.

I Norme quadratique

Soit un plan muni d'un repère orthonormé $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Nous savons, en vertu du théorème de Pythagore, qu'un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x ; y) a une norme (sa longueur) dont le carré vaut :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

Evaluons alors le carré de cette norme, en prenant les coordonnées (x' ; y') de $\vec{u}$ dans une autre base $(\vec{I};\vec{J})$ quelconque, et non nécessairement orthonormée ni même orthogonale donc. Posons :

$$\vec{I} = a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{J} = c\,\vec{\imath} + d\,\vec{\jmath}$$

On a alors :

$$\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = x'\vec{I} + y'\vec{J}$$

Soit :

$$x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = x'(a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath}) + \ y'\ (c\,\vec{\imath} + d\,\vec{\jmath})$$

Cela se traduit, par identification par le système :

$$\begin{cases} x = a\,x' + c\,y' \\ y = b\,x' + d\,y' \end{cases}$$

On en déduit :

$$\|\vec{u}\|^2 = (a\,x' + c\,y')^2 + \ (b\,x' + d\,y')^2$$

Soit après développement et regroupement :

$$\|\vec{u}\|^2 = (a^2 + b^2)\, x'^2 + 2\,(a\,c + b\,d)\, x'y' + (c^2 + d^2)\, y'^2$$

$\|\vec{u}\|^2$ est donc une forme quadratique sur les couples de réels (x' ; y'). Sa racine est appelée **norme quadratique**.

Comment étendre alors cette notion sur des couples de complexes ?

Le problème est simple. Une norme naturelle sur l'ensemble des complexes est le module. Il est donc naturel de considérer pour un couple de complexes (x ; y) noté $\vec{u}$ comme un vecteur, le carré de sa norme sous la forme :

$$\|\vec{u}\|^2 = |x|^2 + |y|^2 = x\,\bar{x} + y\,\bar{y}$$

Les formules de changement de base précédente deviennent alors :

$$\|\vec{u}\|^2 = (a\,x' + c\,y')\,(\overline{a\,x' + c\,y'}) + (b\,x' + d\,y')\,\left(\overline{b\,x' + d\,y'}\right)$$

$$= (a\,x' + c\,y')\,(\bar{a}\,\overline{x'} + \bar{c}\,\overline{y'}) + (b\,x' + d\,y')\,\left(\bar{b}\,\overline{x'} + \bar{d}\,\overline{y'}\right)$$

Soit après développement et regroupement :

$$\|\vec{u}\|^2 =$$

$$(|a|^2 + |b|^2)\,|x'|^2 + \left(a\,\bar{c} + b\,\bar{d}\right)\,x'\overline{y'} + \left(\bar{a}\,c + \bar{b}\,d\right)\overline{x'}\,y' + (|c|^2 + |d|^2)\,|y'|^2$$

Autrement dit le carré de la norme de $\vec{u}$ est de la forme :

$$\|\vec{u}\|^2 = \alpha\,|x'|^2 + \beta\,x'\overline{y'} + \bar{\beta}\,\overline{x'}\,y' + \gamma\,|y'|^2$$

Avec α et γ réels positifs et β complexe

Une telle forme est qualifiée de **forme quadratique hermitienne** sur les couples de complexes (x' ; y')

Mais allons voir un peu plus loin, en factorisant x' et y' dans l'expression précédente :

$$\|\vec{u}\|^2 = x'(\alpha\,\overline{x'} + \beta\,\overline{y'}) + y'\left(\bar{\beta}\,\overline{x'} + \gamma\,\overline{y'}\right)$$

Là encore, cela appelle une écriture matricielle :

$$\|\vec{u}\|^2 = (x' \,;\, y') \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x'} \\ \overline{y'} \end{pmatrix}$$

Cette écriture fait apparaître une matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \gamma \end{pmatrix}$$

Qui possède les qualités suivantes :

- Ses termes diagonaux sont positifs ou nuls.
- Sa transposée est égale à sa conjuguée ce que l'on écrit :

$$^{t}A = \bar{A}$$

Ou encore :

$$^{t}\bar{A} = A$$

On dit encore de cette matrice qu'elle est égale à sa **transconjuguée** et on qualifie une telle matrice d'**hermitienne**.

Notons alors :

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overline{X'} = \begin{pmatrix} \overline{x'} \\ \overline{y'} \end{pmatrix}$$

Il vient :

$$\|\vec{u}\|^2 = {}^{t}X' \, A \, \overline{X'}$$

I I Forme quadratique hermitienne

Nous pouvons maintenant généraliser l'étude précédente en définissant une forme quadratique hermitienne sur l'ensemble des n-uplets de complexes $(z_1; z_2; \cdots; z_n)$.

Il suffit de se donner une matrice A hermitienne, c'est-à-dire vérifiant :

$$^{t}\bar{A} = A$$

autrement dit, dont les coefficients extra diagonaux symétriques par rapport à la diagonale sont conjugués.

La forme quadratique de matrice A sera alors définie par :

$$q(Z) = {}^{t}Z \, A \, \bar{Z}$$

Z désignant le vecteur colonne formé avec les éléments du n-uplet.

Donnons un exemple sur un couple $(z_1; z_2)$ de complexes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix}$$

$$q(Z) = (z_1; z_2) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}$$

$$q(Z) = (z_1; z_2) \begin{pmatrix} 2\,\overline{z_1} + (1-i)\,\overline{z_2} \\ (1+i)\,\overline{z_1} + 3\,\overline{z_2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{q(Z) = 2\,|z_1|^2 + (1-i)\,z_1\,\overline{z_2} + (1+i)\,\overline{z_1}\,z_2 + 3\,|z_2|^2}$$

III Diagonalisation d’une forme quadratique hermitienne

Comme dans le cas d’une forme quadratique réelle, nous allons nous poser le problème du changement de variable, de telle sorte que la forme quadratique s’exprime plus facilement.

Introduisons donc un changement de variable linéaire en posant :

$$\boxed{Z = P\,Z' \quad \text{avec} \quad Z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

les coefficients a, b, c, d de P étant complexes.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} q(Z) &= {}^t Z\, A\, \overline{Z} \\ &= {}^t(P\,Z')\, A\, \overline{P\,Z'} \\ &= {}^t Z'\, {}^t P\, A\, \overline{P}\ \ \overline{Z'} \end{aligned}$$

Supposons alors que l’on puisse diagonaliser A et nous verrons que c’est effectivement le cas un peu plus tard, alors en notant P’ une matrice formée d’une base de vecteurs propres de A et D la matrice diagonale des valeurs propres associées, nous avons :

$$A\,P' = P'D$$

En posant alors :

$$P = \overline{P'} \quad \text{soit} \quad P' = \overline{P}$$

Nous avons :

$$A\,\overline{P} = \overline{P}\,D$$

Et :

$$\boxed{q(Z) = {}^{t}Z'\,{}^{t}P\,\overline{P}\,D\,\overline{Z'}}$$

Afin d'obtenir une forme intéressante, nous voyons qu'il serait judicieux de pouvoir trouver P telle que :

$$\boxed{{}^{t}P\,\overline{P} = I}$$

Cela revient à avoir pour tous couples de colonnes P_i et P_j de P d'indices i et j distincts :

$$\boxed{{}^{t}P_i\,\overline{P_j} = 0}$$

Et pour tout vecteur colonne colonnes P_k :

$$\boxed{{}^{t}P_k\,\overline{P_k} = 1}$$

Par conjugaison des relations, cela revient à avoir les mêmes relations pour la matrice P' des vecteurs propres de A.

Or si $(z_1; z_2; \cdots; z_n)$ et $(z_1'; z_2'; \cdots; z_n')$ sont 2 n-uplets de complexes formant des vecteurs colonnes respectifs Z et Z', alors :

$$\boxed{\begin{array}{c} {}^{t}Z\,\overline{Z'} = z_1\,z_1' + z_2\,z_2' + \cdots + z_n\,z_n' \\ {}^{t}Z\,\overline{Z} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 \end{array}}$$

La dernière expression s'apparente au carré d'une norme. Sa racine est qualifiée de **norme quadratique hermitienne**.

La première expression s'apparente à un produit scalaire et est de ce fait qualifiée de **produit scalaire hermitien**.

Notre problème revient donc à trouver n vecteurs propres de norme hermitienne égale à 1 et dont les produits scalaires hermitiens sont nuls deux à deux, on dira tout simplement une base orthonormée pour le produit scalaire hermitien de vecteurs propres de A.

Eh bien là encore, la nature (des mathématiques) est bien faite car c'est un résultat général que nous pourrons obtenir pour toute matrice hermitienne.

Nous allons simplement le vérifier pour la forme quadratique hermitienne donnée en exemple précédemment.

IV Exemple de réduction d'une forme quadratique hermitienne

Rappelons les données :

$$q(Z) = 2\,|z_1|^2 + (1-i)\,z_1\,\overline{z_2} + (1+i)\,\overline{z_1}\,z_2 + 3\,|z_2|^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminons valeurs propres et vecteurs propres de A en résolvant :

$$(A - \lambda\, I)Z = 0$$

Soit

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1-i \\ 1+i & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant de ce système (polynôme caractéristique de la matrice A) :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (2-\lambda)\,(3-\lambda) - \,(1+i)\,(1-i) \\ &= 6 - 5\,\lambda + \lambda^2 - 2 \end{aligned}$$

Finalement !

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\,\lambda + 4$$

1 étant racine évidente, on peut factoriser ce polynôme :

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)\,(\lambda - 4)$$

Déterminons alors un vecteur propre non nul pour chaque valeur propre.

Pour $\lambda = 1$ on résout :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} & z_1 & + \; (1-\mathrm{i}) & z_2 = 0 \\ (1+\mathrm{i}) & z_1 & + \quad 2 & z_2 = 0 \end{array} \right.$$

Notons alors que la deuxième équation du système est liée à la première par multiplication par (1-i) puis division par 2. Le système équivaut alors à sa première équation :

$$z_1 = (-1+\mathrm{i})\ z_2$$

Nous en déduisons le sous espace propre E_1 des vecteurs colonnes propres associés à la valeur propre 1 :

$$E_1 = \left\{ Z = \begin{pmatrix} (-1+\mathrm{i})\ z_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_2 \begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} , z_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

C'est donc un sous espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ de dimension 1 (il suffit d'un seul nombre complexe z_2 pour caractériser un vecteur propre).

Puisque un seul vecteur propre nous suffit, prenons par exemple :

$$P_1'' = \begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et calculons le carré de sa norme quadratique hermitienne :

$$\|P_1''\|^2 = {}^tP_1''\ \overline{P_1''} = |-1+\mathrm{i}|^2 + |1|^2 = 2 + 1 = 3$$

Nous pouvons alors prendre comme vecteur propre normé :

$$P_1' = \frac{1}{\|P_1''\|} P_1'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons :

$$\boxed{P_1 = \overline{P_1'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}$$

Un travail analogue se fait pour $\lambda = 4$ en résolvant :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Là encore les deux équations du système sont liées et ce dernier équivaut à :

$$z_2 = (1+\mathrm{i}\ )z_1$$

Le sous espace propre E_4 des vecteurs colonnes propres associés à la valeur propre 4 est alors encore de dimension 1 sur $\mathbb{C}$ et engendré par :

$$P_2'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

P_2'' ayant la même norme que P_1'', nous pouvons obtenir le vecteur propre normé :

$$P_2' = \frac{1}{\|P_2''\|} P_2'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Et en déduire son conjugué:

$$\boxed{P_2 = \overline{P_2'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i} \end{pmatrix}}$$

Notons alors que l'on a bien :

$$\boxed{{}^{t}P_1\, \overline{P_2} = {}^{t}\overline{P_1}\, P_2 = 0}$$

La matrice P formée des deux colonnes P_1 et P_2 est alors qualifiée de **matrice unitaire**, c'est-à-dire une matrice dont les colonnes sont normées et orthogonales deux à deux pour le produit scalaire hermitien.

Nous pouvons alors faire le changement de variable Z = P Z' et la forme quadratique devient :

$$q(Z) = {}^{t}Z'\, D\, \overline{Z'}$$

Soit en posant :

$$Z' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix}$$

$$q(Z) = (z'_1\ ;\ z'_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z'_1} \\ \overline{z'_2} \end{pmatrix}$$

$$q(Z) = (z'_1\ ;\ z'_2) \begin{pmatrix} z'_1 \\ 4\, z'_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{q(Z) = |z'_1|^2 + 4\,|z'_2|^2}$$

Voilà c'est bien mieux comme cela, ne trouvez vous pas, avec ces nouvelles variables z'_1 et z'_2 que nous pouvons exprimer en fonction des anciennes en inversant la relation Z = P Z' :

$$Z' = P^{-1}\, Z = {}^{t}\overline{P}\, Z$$

Soit concrètement, puisque :

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}i & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}i \end{pmatrix}$$

$$^t\overline{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z'_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i\right) z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_2 \\ z'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i\right) z_2 \end{cases}$$

Finalement :

$$q(Z) = \left|\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i\right) z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_2\right|^2 + 4 \left|\frac{1}{\sqrt{3}} z_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i\right) z_2\right|^2$$

Soit plus élégamment écrit :

$$\boxed{q(Z) = \frac{1}{3}|(-1+i)\, z_1 + z_2|^2 + \frac{4}{3}\,|\, z_1 + (1+i)\, z_2|^2}$$

Tout ça, pour ça. Eh oui ! Ca pourra être très utile, patience…

Au passage, vérifions que nous n'avons pas commis d'erreur de calcul en redéveloppant l'expression précédente :

$$\begin{aligned} q(Z) &= \frac{1}{3}\left(2|\, z_1|^2 + |\, z_2|^2 + (-1+i)\, z_1 \overline{z_2} + (-1-i)\overline{z_1}\, z_2\right) \\ &+ \frac{4}{3}\left(|\, z_1|^2 + 2\,|\, z_2|^2 + (1-i)\, z_1\overline{z_2} + (1+i)\overline{z_1}\, z_2\right) \\ &= 2\,|z_1|^2 + (1-i)\, z_1\, \overline{z_2} + (1+i)\, \overline{z_1}\, z_2 + 3\,|z_2|^2 \end{aligned}$$

C'est correct, mais il ne faut jamais oublier de contrôler ses calculs, une erreur étant si vite arrivée !

Un petit défi lancé aux cracks en maths (et aux autres !). Voici une forme quadratique hermitienne à trois variables, que j'ai concoctée spécialement pour vous de telle sorte qu'elle ait des valeurs propres simples. Je vous expliquerai prochainement la recette, au cas où vous voudriez devenir prof de maths, en faisant vous-mêmes vos exercices, comme on fait une tarte maison. C'est généralement meilleur qu'une production industrielle !

Voici le bébé :

$$\boxed{\begin{aligned} q(Z) = {} & \frac{4}{3}\,|z_1|^2 + \frac{(1+i)}{2\sqrt{3}}\, z_1\, \overline{z_2} + \frac{(1-i)}{2\sqrt{3}}\, \overline{z_1}\, z_2 \\ & + \frac{3}{2}\,|z_2|^2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}\, z_1\, \overline{z_3} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\, \overline{z_1}\, z_3 \\ & + \frac{7}{6}\,|z_3|^2 + \frac{(1-i)}{2\sqrt{6}}\, z_2\, \overline{z_3} + \frac{(1+i)}{2\sqrt{6}}\, \overline{z_2}\, z_3 \end{aligned}}$$

Les questions sont :

- Déterminer la matrice associée et vérifier qu'elle est hermitienne
- Calculer de polynôme caractéristique et en déduire les valeurs propres
- Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres associés
- Réduire alors la forme quadratique sur de nouvelles variables

La récompense est :

- m'écrire pour m'envoyer la réponse
- un plaisir intellectuel pur, non marchand (pour une fois, ça change !)