Réduction des formes quadratiques réelles

Approche du problème

Nous allons approcher le problème de la réduction des formes quadratiques réelles en partant d'une problématique visant à déterminer un ensemble de points du plan dont les coordonnées vérifient dans un repère orthonormé une équation de degré deux.

I Problème posé

Soit un plan muni d'un repère orthonormé $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Et soit à déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M de coordonnées (x ; y) dans ce repère, vérifiant :

$$\boxed{x^2 + 4\,x\,y + 9\,y^2 = 1}$$

Transformons par équivalence cette équation, en dédoublant le terme en x y puis en factorisant x et y :

$$x^2 + 2\,x\,y + 2\,y\,x + 9\,y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow\ x\,(x + 2\,y)\ + y\,(2\,x + 9\,y) = 1$$

Transformons alors cette équation sous forme d'un produit d'un vecteur ligne (x ; y) par un vecteur colonne , ce qui s'apparente à un produit scalaire :

$$(x\ ;\ y)\begin{pmatrix} x + 2\,y \\ 2\,x + 9\,y \end{pmatrix}$$

Soit, en faisant apparaître une matrice :

$$(x\ ;\ y)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Compactons encore l'écriture afin de pouvoir raisonner plus facilement.

Notons pour cela :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad {}^tX = (x\,;y) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

X est qualifié de **vecteur colonne** et ${}^tX$ de **vecteur ligne transposé de X**

L'équation initiale s'écrit alors :

$$\boxed{{}^tX\,A\,X = 1}$$

On ne peut pas faire plus compact. C'est à ce prix là (réduction drastique dans les écritures, ça fait moins mal que dans les budgets !) qu'on fait de bonnes mathématiques.

Et si nous changeions de variables, selon une technique déjà éprouvée dans notre fichier intitulé « diagonalisation des matrices et analyse modale », en posant :

$$X = P\,X' \quad \text{avec} \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

où P serait une matrice carrée à déterminer convenablement et nous allons voir comment.

L'équation s'écrit alors :

$$\boxed{{}^t(P\,X')\,A\,(P\,X') = 1}$$

Voyons alors ce qui se cache sous ${}^t(P\,X')$.

$$P\,X' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,x' + b\,y' \\ c\,x' + d\,y' \end{pmatrix}$$

$${}^t(P\,X') = (\,a\,x' + b\,y';\; c\,x' + d\,y') = (x';y')\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Ouah !! C'est magique, nous avons une relation simple :

$$\boxed{{}^t(P\,X') = {}^tX'\;{}^tP}$$

en désignant par ${}^tP$ la matrice dont les lignes sont les colonnes de P, et appelée ainsi **matrice transposée de P**. Pour ceux qui ont le sens géométrique, et c'est plutôt conseillé en sciences, la matrice transposée est également la symétrique de la matrice P par rapport à la diagonale descendante. Les coefficients de cette dernière diagonale sont donc inchangés.

Notre équation devient alors :

$$\boxed{{}^{t}X' \, {}^{t}P \, A \, P \, X' = 1}$$

Nous inspirant de la démarche de diagonalisation, si nous arrivions à trouver P inversible et D matrice diagonale telles que l'on ait à la fois :

$$\boxed{{}^{t}P = P^{-1} \qquad \text{et} \qquad A\,P = P\,D}$$

alors la vie n'en serait que plus douce et nous pourrions recommencer à nous émerveiller de ce petit rouge gorge venu se poser sur la branche d'un arbre ou de cet écureuil venu lui faire un brin de causette.

En effet, nous aurions alors :

$${}^{t}X' \, P^{-1} \, P \, D \, X' = 1$$

Soit :

$${}^{t}X' \, D \, X' = 1$$

Et en notant λ_1 et λ_2 les deux coefficients diagonaux de D qui ne seraient que les valeurs propres de A, les colonnes de P en étant les vecteurs propres associés, nous aurions :

$$(x'; y') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$$

Soit :

$$\boxed{\lambda_1 \, {x'}^2 + \lambda_2 \, {y'}^2 = 1}$$

Or si nous notions $\vec{I}; \vec{J}$ les vecteurs dont les coordonnées dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ seraient les colonnes de P, le couple $(x'; y')$ serait le couple de coordonnées du point M dans le repère $(0; \vec{I}; \vec{J})$ qui a les coordonnées (x ; y) dans le repère $(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

L'équation précédente serait donc l'équation de notre ensemble $\mathcal{E}$ dans le repère $(0; \vec{I}; \vec{J})$.

De plus la relation :

$$^{t}P = P^{-1}$$

pourrait encore s'écrire :

$$^{t}P\ P = I$$

Soit en notant P_1 et P_2 les vecteurs colonnes de P :

$$\boxed{^{t}P_1\ P_1 = 1 \quad ^{t}P_1\ P_2 = 0 \quad ^{t}P_2\ P_2 = 1}$$

Ces trois relations traduisent le fait que la base $(\vec{I};\vec{J})$ serait orhtonormée.

Notre problème consiste donc à **diagonaliser la matrice A dans une base orthonormée.**

Or , notez que l'on a :

$$\boxed{^{t}A\ = A}$$

On dit de A que c'est une **matrice symétrique réelle**. Eh bien croyez moi ou non, mais une telle matrice, quelque soit sa taille, est diagonalisable dans une base orthonormale. J'espère que vous ne ferez pas que me croire, car la science n'est pas une question de foi, aussi je vous donne rendez vous un peu plus tard dans un fichier qui traitera de ce point.

Vous avez là aussi une explication à la mystérieuse manipulation du début, consistant à dédoubler le terme en x y. C'est pour obtenir une matrice symétrique. Essayez sans cela, vous verrez que ça ne marche pas.

II Résolution du problème posé

Cherchons donc deux vecteurs colonnes orthornormés P_1 et P_2 et deux réels λ_1 et λ_2 tels que pour :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

on ait :

$$A\,P_1 = \lambda_1\,P_1 \quad \text{et} \quad A\,P_2 = \lambda_2\,P_2$$

Cela revient à résoudre le problème :

$$(A - \lambda\, I)\, X = 0$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 9-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice (polynôme caractéristique) est alors :

$$(1-\lambda)(9-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 10\,\lambda + 5$$

Son discriminant est :

$$\Delta = 100 - 4 \times 5 = 80$$

Ses racines sont :

$$\lambda_1 = \frac{10 - 4\sqrt{5}}{2} = 5 - 2\sqrt{5}$$

$$\lambda_2 = \frac{10 + 4\sqrt{5}}{2} = 5 + 2\sqrt{5}$$

La matrice A a donc deux valeurs propres réelles. Déterminons pour chacune, un vecteur propre associé.

Pour λ_1 on résout le système matriciel précédent soit :

$$\begin{cases} \left(-4 + 2\sqrt{5}\right) x + 2\, y = 0 \\ 2\, x + \left(4 + 2\sqrt{5}\right) y = 0 \end{cases}$$

Notez que la seconde équation, multipliée par $\left(-4 + 2\sqrt{5}\right)$ et divisée par 2 redonne la première. Cette démarche est importante pour traquer les erreurs de calcul.

Le système équivaut donc à sa première équation, qui est une droite vectorielle. Il nous suffit de prendre pour vecteur colonne, un vecteur non nul, par exemple :

$$P_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 - 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Sauf que l'animal n'est pas normé (excusez !!! le langage peu académique mais ça fait du bien de temps en temps, de desserrer la cravate). C'est pour éviter le burn out !

Normons donc « l'animal » en calculant le carré de sa norme :

$$
\begin{aligned}
{}^{t}\mathrm{P}_1{}'\,\mathrm{P}_1' &= 2^2 + \left(4 - 2\sqrt{5}\right)^2 = 4 + 16 - 16\sqrt{5} + 20 = 40 - 16\sqrt{5} \\
&= 4\left(10 - 4\sqrt{5}\right)
\end{aligned}
$$

La norme de P_1' est alors :

$$\|\mathrm{P}_1'\| = \sqrt{{}^{t}\mathrm{P}_1{}'\,\mathrm{P}_1'} = 2 \times \sqrt{10 - 4\sqrt{5}}$$

Nous en déduisons un vecteur propre normé :

$$\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}} \\ \dfrac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}} \end{pmatrix}$$

Eh oui, c'est pas beau, avec toutes ces racines, encore que, j'ai vu pire dans l'art abstrait. Mais je n'ai pas triché en choisissant mes données de départ pour que tout s'arrange bien, je les ai prise au hasard, ce qui est plus conforme à ce qu'un scientifique est susceptible de rencontrer. Na !

Reprenez la même démarche pour déterminer un vecteur propre normé associé à la deuxième valeur propre λ_2 et vous devriez aboutir à quelque chose du genre :

$$\mathrm{P}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10 + 4\sqrt{5}}} \\ \dfrac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 4\sqrt{5}}} \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas grand-chose qui change à part des moins à la place des plus devant les racines. P_1 et P_2 sont dits conjugués. Je renvoie le lecteur curieux à l'étude du cas général lorsque les coefficients de la matrice A sont entiers, voire rationnels et que le discriminant du polynôme caractéristique est irrationnel (merci de mettre le résultat dans ma boîte mail, je ne vous le volerai pas, je ne suis pas un plagiaire mais un simple amoureux de l'ordre des choses sans mauvaise vénalité derrière).

Tiens donc, se dit votre œil vif de futur mathématicien patenté et non de perroquet diplômé :

$$^{t}P_1{}' \, P_2' = 0$$

Du coup :

$$^{t}P_1 \, P_2 = 0$$

Chouette alors, c'est ce qu'on cherchait, les vecteurs propres P_1 et P_2 associés aux deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 sont orthogonaux. Ca sent la conjecture à plein nez : Et si c'était vrai de manière générale, c'est-à-dire que pour toute matrice symétrique réelle, de taille quelconque, on puisse trouver une base de vecteurs propres orthonormés, ce serait le bonheur, non ? Eh bien, c'est vrai, mais attendez que je vous le démontre ou cherchez par vous-mêmes mais je ne suis pas naïf.

Finalement nous avons trouvé l'équation de notre ensemble $\mathcal{E}$ dans le nouveau repère $\left(0; \vec{\mathrm{I}}; \vec{\mathrm{J}}\right)$ où $\vec{\mathrm{I}}; \vec{\mathrm{J}}$ forment une base orthormée de vecteurs dont les coordonnées dans le repère initial $\left(0; \vec{\mathrm{I}}; \vec{\mathrm{J}}\right)$ sont respectivement les vecteurs colonnes P_1 et P_2.

Cette équation est :

$$\boxed{\left(5 - 2\sqrt{5}\right) x'^2 + \left(5 + 2\sqrt{5}\right) y'^2 = 1}$$

Soit encore :

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{5 - 2\sqrt{5}}} + \frac{y'^2}{\frac{1}{5 + 2\sqrt{5}}} = 1$$

Posons alors pour $a > 0$ et $b > 0$:

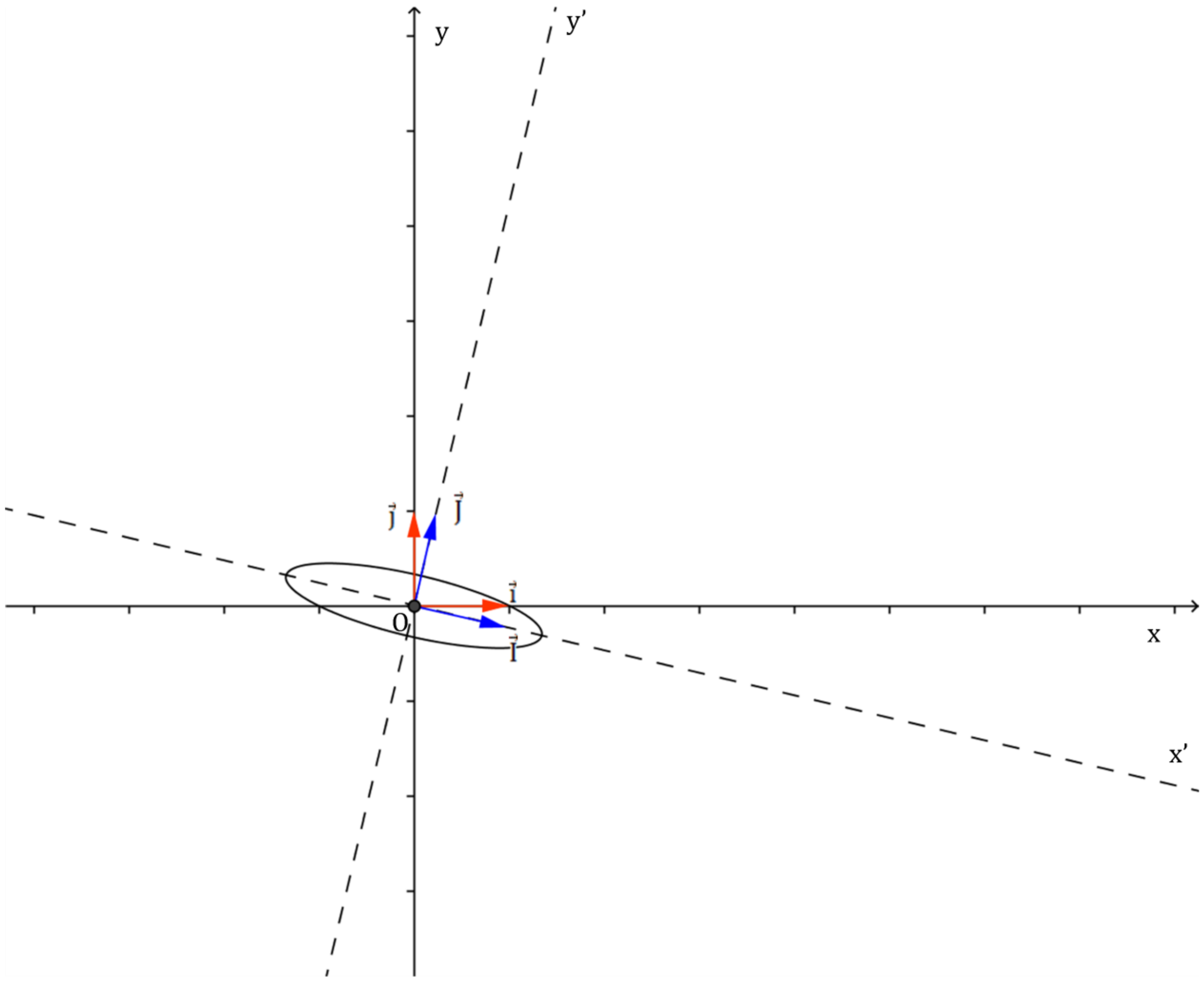
$$a^2 = \frac{1}{5 - 2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad b^2 = \frac{1}{5 + 2\sqrt{5}}$$

L'équation devient :

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Nous reconnaissons là l'équation d'une ellipse de demi grand axe a et demi petit axe b.

En voici le tracé dans le repère $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.



Nous pouvons vérifier l'exactitude du tracé en notant sur l'équation initiale quatre points remarquables de $\mathcal{E}$, à savoir les points d'intersections avec les axes coordonnées B(1 ;0)   C(-1 ; 0) E(0 ; 1/3) F(0 ;-1/3)