Réduction simultanée des matrices symétriques réelles

Dans toute la suite, les matrices considérées seront à termes dans le corps $\mathbb{R}$. On notera $\mathbb{R}^n_{col}$ l'ensemble des vecteurs colonnes à n termes dans $\mathbb{R}$.

I Forme bilinéaire canonique associée à une matrice carrée.

Soit X et Y deux vecteurs-colonne de $\mathbb{R}^n_{col}$ et A une matrice symétrique réelle. Alors on définit sur $\mathbb{R}^n_{col} \times \mathbb{R}^n_{col}$ l'application f_A suivante à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f_A(X,Y) = {}^tX\,A\,Y = \sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

f_A est une forme bilinéaire que nous qualifierons de **forme bilinéaire canonique** associée à la matrice A c'est-à-dire vérifiant, rappelons-le :

$$\forall\ (X_1, X_2, Y, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n_{col} \times \mathbb{R}^n_{col} \times \mathbb{R}^n_{col} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} :\ f_A(\alpha\, X_1 + \beta\, X_2, Y) = \alpha\, f_A(X_1, Y) + \beta\, f_A(X_2, Y)$$

$$\forall\ (Y_1, Y_2, X, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n_{col} \times \mathbb{R}^n_{col} \times \mathbb{R}^n_{col} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} :\ f_A(X, \alpha\, Y_1 + \beta\, Y_2) = \alpha\, f_A(X, Y_1) + \beta\, f_A(X, Y_2)$$

De plus f_A est dite **symétrique** si elle vérifie :

$$\forall\ (X,Y) \in \mathbb{R}^n_{col} \times \mathbb{R}^n_{col} :\ \ f_A(X,Y) = f_A(Y,X)$$

f_A est dite **positive** si elle vérifie :

$$\forall\ X \in \mathbb{R}^n_{col} :\ \ f_A(X,X) \ge 0$$

f_A est dite **définie** si elle vérifie :

$$\forall\ X \in \mathbb{R}^n_{col} :\ \ f_A(X,X) = 0 \Leftrightarrow\ X = 0$$

Dans ce cas f_A définit un **produit scalaire** sur $\mathbb{R}^n_{col}$ et fait de ce dernier espace un espace vectoriel euclidien.

II Matrice symétrique réelle définie positive

Définition :

On dit d'une matrice A symétrique réelle qu'elle est définie positive, si la forme bilinéaire canonique associée est un produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n_{col} :\ {}^t\boldsymbol{X\,A\,X} \ge \boldsymbol{0}, \qquad {}^t\boldsymbol{X\,A\,X} = \boldsymbol{0}\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$$

Propriété 1 :

Une matrice A symétrique réelle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives

Preuve :

Supposons A symétrique réelle définie positive. Alors, il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale d'éléments diagonaux formés par les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, toutes deux du même ordre que A, telles que :

$$A = P\, D\, P^{-1} = P\, D\, {}^tP$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et P_i la colonne de P de rang i. Alors :

$${}^tP_i\, A\, P_i = {}^tP_i\, \lambda_i\, P_i = \lambda_i\, {}^tP_i\, P_i = \lambda_i$$

Or P_i étant non nul et A définie positive, on a :

$${}^tP_i\, A\, P_i > 0$$

Donc :

$$\lambda_i > 0$$

Réciproquement, supposons A symétrique réelle à valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ strictement positives. Soit X un vecteur colonne non nul de $\mathbb{R}^n_{col}$. Alors :

$${}^tX\, A\, X = {}^tX\, P\, D\, {}^tP\, X = {}^t({}^tP\, X)\, D\, ({}^tP\, X)$$

Posons :

$$Y = {}^tP\, X = P^{-1}\, X$$

Alors Y est un vecteur colonne non nul de $\mathbb{R}^n_{col}$. Notons ses termes $y_1, y_2, \dots, y_n$. Alors :

$${}^tX\, A\, X = {}^tY\, D\, Y = \lambda_1\, {y_1}^2 + \lambda_2\, {y_2}^2 + \cdots + \lambda_n\, {y_n}^2 > 0$$

Donc A est définie positive.

III Base orthonormale associée à une matrice symétrique définie positive

Définition :

Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre n. Une famille $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est dite A −orthonormale si elle est orthonormale pour le produit scalaire canonique associé à A, c'est-à-dire si :

$$\forall\, (i, j)\, \in\, [\![1, n]\!]^2 :\; {}^tP_i\, A\, P_j = \delta_{ij}$$

Où δ_{ij} est le symbole de Kronecker valant 1 si $i = j$ et 0 sinon.

Propriétés :

1) Toute famille $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ A −orthonormale est une base de $\mathbb{R}^n_{col}$. Plus précisément, en notant :

$$\langle X | Y \rangle_A = {}^tX\, A\, Y$$

$$\|X\|_A = \sqrt{\langle X | X \rangle}$$

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n_{col} : X = \sum_{i=1}^{n} \langle X|P_i\rangle_A\ P_i, \qquad \|X\|_A = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {\langle X|P_i\rangle_A}^2}$$

2) Une famille $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est A −orthonormale si et seulement si la matrice P formée avec les colonnes de cette famille vérifie :

$${}^tP\, A\, P = I_n$$

3) Pour toute matrice symétrique définie positive d'ordre n, il existe des bases A −orthonormales, et plus précisément, pour toute base $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ il existe une base A −orthonormale $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ telle que :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!] : Vect[P_1, P_2, \dots, P_k] = Vect[V_1, V_2, \dots, V_k]$$

Un procédé permettant de construire une telle base est le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, défini comme suit :

Etape 1 : Normalisation du premier vecteur de base :

$$P_1 = \frac{1}{\|V_1\|_A}\, V_1$$

Etape 2 : On « redresse » d'abord V_2 en créant :

$$P'_2 = V_2 - \langle V_2|P_1\rangle_A\, P_1$$

Puis on normalise ce vecteur :

$$P_2 = \frac{1}{\|P'_2\|_A}\, P'_2$$

Etape k : Ayant construit $P_1, P_2, \dots, P_{k-1}$ pour $k \geq 2$ on redresse V_k en créant :

$$P'_k = V_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V_k|P_i\rangle_A\, P_i$$

Puis on normalise ce vecteur :

$$P_k = \frac{1}{\|P'_k\|_A}\, P'_k$$

On s'arrête à l'étape n.

Preuve :

1) Supposons

$$x_1\, P_1 + x_2\, P_2 + \cdots + x_n\, P_n = 0$$

Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\langle x_1\, P_1 + x_2\, P_2 + \cdots + x_n\, P_n | P_i\rangle_A = 0$$

Donc, en développant :

$$x_1 \langle P_1|P_i\rangle_A + x_2 \langle P_2|P_i\rangle_A + \cdots + x_n \langle P_n|P_i\rangle_A = 0$$

Soit :

$$x_i \langle P_i|P_i\rangle_A = 0$$

Donc :

$$x_i = 0$$

La famille $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est donc libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^n_{col}$.

Décomposons alors une colonne X quelconque sur cette base :

$$X = x_1\, P_1 + x_2\, P_2 + \cdots + x_n\, P_n$$

Alors :

$$\langle X|P_i\rangle_A = x_i \langle P_i|P_i\rangle_A = x_i$$

2) Evident

<u>IV Réduction simultanée de deux matrices symétriques.</u>

> **Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre n et B une matrice symétrique quelconque d'ordre n alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :**
>
> $$\boldsymbol{{}^tP\,A\,P = I_n,\qquad {}^tP\,B\,P = D}$$

<u>Preuve</u> :

Soit Q la matrice carrée d'ordre n formée avec les colonnes d'une base A −orthonormale. Alors :

$${}^tQ\,A\,Q = I_n$$

Soit alors B' la matrice définie par :

$$B' = {}^tQ\,B\,Q$$

Alors :

$${}^tB' = {}^tQ\,{}^tB\;Q = {}^tQ\,B\,Q = B'$$

Donc B' est symétrique réelle. Soit donc R la matrice carrée d'ordre n formée avec les colonnes d'une base orthonormale de vecteurs propres de B' pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n_{col}$. Alors :

$${}^tR\,B'\,R = R^{-1}\,B\,R = D$$

Donc :

$${}^tR\,{}^tQ\,B\,Q\,R = D$$

Soit :

$${}^t(Q\,R)\,B\,(Q\,R) = D$$

Posons $P = Q\,R$ alors :

$$ {}^tP\ A\ P = {}^t(Q\ R)\ A\ (Q\ R) = {}^tR\ {}^tQ\ A\ Q\ R = {}^tR\ I_n\ R = {}^tR\ R = I_n $$

Et :

$$ {}^tP\ B\ P = D $$