Calcul d'applications réciproques

I Fonction polynômiale du second degré

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 + 5\,x - 7$

Son domaine de définition est : $D_f = \mathbb{R}$

Sa dérivée définie sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2\,x\ + 5$ s'annule en $x = -5/2$

$f(-5/2) = -53/4$

Le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		$-5/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-53/4$	$\nearrow$	$+\infty$

f étant continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,-5/2]$, elle définit une bijection que nous noterons f_1 de $]-\infty\,;\,-5/2]$ dans $f(\,]-\infty\,;\,-5/2]\,) = [-53/4\,;\,+\infty[$.

Rappelons que du point de vue mathématique :

$f_1 = (\,]-\infty\,;\,-5/2]\,;[-53/4\,;\,+\infty[\,;\,\{(\mathrm{x}\,,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{y} = x^2 + 5\,x - 7\,\}\,)$

L'application réciproque de f_1 est alors :

$f_1^{\ -1} = (\ [-53/4\,;\,+\infty[\,;\,]-\infty\,;\,-5/2]\ ;\{(\mathrm{x}\,,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{y} = x^2 + 5\,x - 7\,\}\,)$

Pour des raisons de commodité, nous conviendrons de présenter une application et sa réciproque selon le schéma suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1\ :\ \left]-\infty\,;\,-\dfrac{5}{2}\right] & \to & \left[-\dfrac{53}{4};\,+\infty\right[\\ x & \to & y = f(x) = x^2 + 5\,x - 7 \\ x = f_1^{\ -1}(y) & \leftarrow & y \end{array}\right.$$

f étant continue et strictement décroissante sur $]-5/2\ ;\ +\infty]$, elle définit également une bijection que nous noterons f_2 de $]-5/2\ ;\ +\infty]$ dans $f(]-5/2\ ;\ +\infty]\ ) =]-53/4\ ;\ +\infty]$.

$$\begin{cases} f_2 \ :\ \left]-\frac{5}{2}\ ;\ +\infty\right] \ \to\ \left[-\frac{53}{4};\ +\infty\right[\\ \qquad\qquad x \quad \to \quad y = f(x) = x^2 + 5\,x - 7 \\ x = \ {f_2}^{-1}(y) \quad \leftarrow \quad y \end{cases}$$

Il reste maintenant à déterminer les expressions analytiques de ces applications réciproques en procédant ainsi pour f_1 :

$\forall\ (x\ ,y) \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{5}{2}\right] \times \left[-\frac{53}{4};\ +\infty\right[$:

$$y = f(x) \ \Leftrightarrow y = x^2 + 5\,x - 7$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + 5\,x - 7 - y$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + 5\,x - (y + 7)$$

Pour déterminer l'unique antécédent x d'un nombre y de $\left[-\frac{53}{4};\ +\infty\right[$ par f_1, nous sommes donc ramenés à déterminer les racines d'un polynôme du second degré, dont le discriminant, dépendant de y, est :

$$\Delta = \ 5^2 - 4\,(1)[-(y+7)] = 25 + 4\,y + 28 = 4\,y + 53$$

Sur l'intervalle de y considéré, on a : $\Delta \geq 0$. Le trinôme en x a donc deux racines $x_1(y)$ et $x_2(y)$ éventuellement égales, ce qui traduit le fait que y a deux antécédents par f éventuellement égaux.

Le tableau de variation montre alors que la racine la plus petite est ${f_1}^{-1}(y)$.

Ainsi :

$$\boxed{{f_1}^{-1}(y) = x_1(y) = \frac{-5 - \sqrt{4\,y + 53}}{2}}$$

De la même façon :

$$\boxed{{f_2}^{-1}(y) = x_2(y) = \frac{-5 + \sqrt{4\,y + 53}}{2}}$$

II Fonction homographique

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{5\,x - 7}{x + 3}$$

Son domaine de définition est : $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$

Sa dérivée , définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ est :

$$f'(x) = \frac{5\,(x\ + 3) - (5\,x - 7)}{(x + 3)^2} = \frac{22}{(x + 3)^2} > 0$$

Le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$5 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 5$

f étant continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-3[$, elle définit une bijection de $]-\infty\,;\,-3[$ dans $f(\,]-\infty\,;\,-3[\,) =]5\,;\,+\infty]$.

Pour les mêmes raisons, elle définit également une bijection de $]-3\,;\,+\infty[$ dans $f(\,]-3\,;\,+\infty[\,) =]-\infty\,;\,5[$.

Comme les deux intervalles images $]-\infty\,;\,5[$ et $]5\,;\,+\infty]$ sont disjoints, f définit ne bijection de $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ dans $\mathbb{R}\backslash\{5\}$

$$\left\{\begin{array}{cccc} f & : \mathbb{R}\backslash\{-3\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{5\} \\ & x & \to & y = \dfrac{5\,x - 7}{x + 3} \\ x = f^{-1}(y) & & \leftarrow & y \end{array}\right.$$

Déterminons alors l’expression analytique de l’application réciproque :

$\forall\,(x\,,y) \in \mathbb{R}\backslash\{-3\} \times \mathbb{R}\backslash\{5\}$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{5\,x - 7}{x + 3}$$

$$\Leftrightarrow \quad y\,(x+3) = 5\,x - 7$$

$$\Leftrightarrow \quad y\;x + 3\,y = 5\,x - 7$$

$$\Leftrightarrow \quad y\;x - 5\,x = -3\,y - 7$$

$$\Leftrightarrow \quad (y-5)\,x = -3\,y - 7$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-3\,y-7}{y-5}$$

Ainsi :

$$\boxed{f^{-1}(y) = \frac{-3\,y-7}{y-5}}$$

III Fonction racine

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{5-x}$$

Son domaine de définition est : $D_f =]-\infty\,;\,5]$

Sa dérivée , définie sur $]-\infty\,;\,5[$ est :

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} < 0$$

Le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$ $\qquad$ 5
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

f étant continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,5]$, elle définit une bijection de $]-\infty\,;\,5]$ dans $f(\,]-\infty\,;\,5]\,) = [0\,;\,+\infty[$

$$\left\{\begin{array}{ccc} f \;:\;]-\infty\,;\,5] & \rightarrow & [0\,;\,+\infty[\\ x & \rightarrow & y = \sqrt{5-x} \\ x = f^{-1}(y) & \leftarrow & y \end{array}\right.$$

Déterminons alors l'expression analytique de l'application réciproque :

$\forall\ (x\,, y) \in\ ]-\infty\ ;\ 5] \quad \times [0\ ;\ +\infty[$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{5 - x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = 5 - x$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 5 - y^2$$

Ainsi :

$$\boxed{f^{-1}(y) = 5 - y^2}$$

IV Fonction cosinus et sinus hyberbolique

Soit ch et sh les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Nous avons clairement sur $\mathbb{R}$:

$$ch'(x) = sh(x)$$

$$sh'(x) = ch(x) > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} ch(x) = \lim_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} ch(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty$$

sh est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0. On en déduit les tableaux de variation des deux fonctions :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$sh'(x)$	$+$

$sh(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'(x)$		$-$	0	$+$	
$ch(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

sh définit donc une bijection de $]-\infty;+\infty[$ dans $]-\infty;+\infty[$ et ch une bijection de $[0;+\infty[$ dans $[1;+\infty[$

Déterminons l'expression analytique de sh^{-1} :

$\forall\ (x\,,y) \in\ ]-\infty;+\infty[\ \times\ ]-\infty;+\infty[$:

$$y = sh(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,y = e^x - e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,y\,e^x = (e^x)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2\,y\,e^x - 1 = 0$$

Résolvons en t sur $]0;+\infty[$

$$t^2 - 2\,y\,t - 1 = 0$$

$$\Delta = 4\,y^2 + 4 = 4\,(y^2+1) > 0$$

Il y a donc deux racines :

$$t_1 = \frac{2\,y - 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y - \sqrt{y^2+1}$$

$$t_2 = \frac{2\,y + 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}$$

Le produit des racines est :

$$t_1\,t_2 = -1$$

On en déduit :

$$t_2 > 0, \qquad t_1 < 0$$

Ainsi :

$$y = sh(x) \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

$$\Leftrightarrow x = Ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

$$\boxed{sh^{-1}(y) = Ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)}$$

Faisons un travail analogue avec le cosinus hyperbolique :

$\forall\ (x\ , y) \in [0; +\infty[\ \times\ [1; +\infty[$:

$$y = ch(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,y = e^x + e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,y\,e^x = (e^x)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2\,y\,e^x + 1 = 0$$

Résolvons en t sur $]0; +\infty[$

$$t^2 - 2\,y\,t + 1 = 0$$

$$\Delta = 4\,y^2 - 4 = 4\,(y^2 - 1) > 0$$

Il y a donc deux racines :

$$t_1 = \frac{2\,y - 2\sqrt{y^2-1}}{2} = y - \sqrt{y^2-1}$$

$$t_2 = \frac{2\,y + 2\sqrt{y^2-1}}{2} = y + \sqrt{y^2-1}$$

Le produit des racines est :

$$t_1\,t_2 = 1$$

On en déduit :

$$t_1 < 1 < t_2$$

Ainsi :

$$y = ch(x) \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow x = Ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

$$\boxed{ch^{-1}(y) = Ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)}$$

V Fonction Tangente hyberbolique

Soit th la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$th(x) = \frac{ch(x)\, ch(x) - sh(x)\, sh(x)}{ch^2(x)}$$

$$= \frac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)}$$

$$= \frac{\left(ch(x) - sh(x)\right)\left(ch(x) + sh(x)\right)}{ch^2(x)}$$

$$= \frac{e^{-x}\, e^x}{ch^2(x)} = \frac{1}{ch^2(x)} > 0$$

th est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\lim_{x \to +\infty} th(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x\,(1 - e^{-2x})}{e^x\,(1 + e^{-2x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

En notant que th est impaire :

$$\lim_{x \to -\infty} th(x) = -1$$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
$th'(x)$		$+$	
$th(x)$	-1	$\nearrow$	1

th définit donc une bijection de $]-\infty; +\infty[$ dans $]-1; 1[$

Déterminons l'expression analytique de la réciproque :

$\forall\ (x\ , y) \in\ ]-\infty; +\infty[\ \times\ ]-1; 1[$:

$$y = th(x) \ \Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1}$$

Posons : $t = (e^x)^2$ et résolvons

$$y = \frac{t - 1}{t + 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad y\,(t + 1) = t - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y\,t + y = t - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y + 1 = t - y\,t$$

$$\Leftrightarrow \quad y + 1 = t\,(1 - y)$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{1 + y}{1 - y}$$

Ainsi :

$$y = th(x) \ \Leftrightarrow (e^x)^2 = \frac{1 + y}{1 - y}$$

$$\Leftrightarrow 2\,x = Ln\left(\frac{1 + y}{1 + y}\right)$$

$$\boxed{th^{-1}(y) = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)}$$