Racines n-ièmes de l'unité

I Préambule

Nous allons établir une identité que nous allons utiliser plus loin et qui n'est que la généralisation d'une formule de factorisation bien connue, valable pour des nombres complexes :

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$$

En effet, on peut aisément constater par développement :

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + a\,b + b^2\right)}$$

$$\boldsymbol{a^4 - b^4 = (a - b)\left(a^3 + a^2\,b + a\,b^2 + b^3\right)}$$

Et émettre la conjecture pour un entier naturel non nul n quelconque :

$$\boldsymbol{a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 + \cdots b^{n-1}\right) = (a - b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}\,b^k}$$

Preuve :

Rappelons l'identité facile à établir par développement

$$1 - z^n = (1 - z)\,(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}) = (1 - z)\sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

En traitant le cas non trivial où a est non nul, nous avons alors :

$$a^n - b^n = a^n\left(1 - \frac{b^n}{a^n}\right)$$

Soit en posant :

$$z = \frac{b}{a}$$

Nous avons :

$$a^n - b^n = a^n\,(1 - z^n) = a^n\,(1 - z)\,(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})$$

Donc :

$$a^n - b^n == a^n \left(1 - \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}\right)$$

$$a^n - b^n = a \left(1 - \frac{b}{a}\right) a^{n-1} \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \cdots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right)$$

$$a^n - b^n = (a - b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 + \cdots b^{n-1})$$

Ce qu'il fallait démontrer

<u>II Problème posé</u>

On se propose de résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, pour un entier naturel donné n quelconque l'équation en z :

$$\boldsymbol{z^n = 1}$$

Commençons par quelques cas particuliers :

1) <u>Cas n = 0</u>

C'est le cas trivial, l'ensemble de solution est : $\mathcal{S} = \mathbb{C}$

2) <u>Cas n = 1</u>

C'est encore un cas trivial, l'ensemble de solution est : $\mathcal{S} = \{1\}$.

3) <u>Cas n = 2</u>

$$z^2 = 1 \Leftrightarrow z = 1 \; ou \; z = -1$$

L'ensemble de solution est :

$$\mathcal{S} = \{-1\,;1\}$$

Il est à noter que les solutions sont les affixes des extrémités d'un diamètre du cercle de centre O et de rayon 1 du plan complexe

4) <u>Cas n = 3</u>

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)\,(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z - 1 = 0 \;\; ou \;\; z^2 + z + 1 = 0$$

Le polynôme du second degré a pour discriminant :

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = \left(i\,\sqrt{3}\right)^2$$

Ses racines sont :

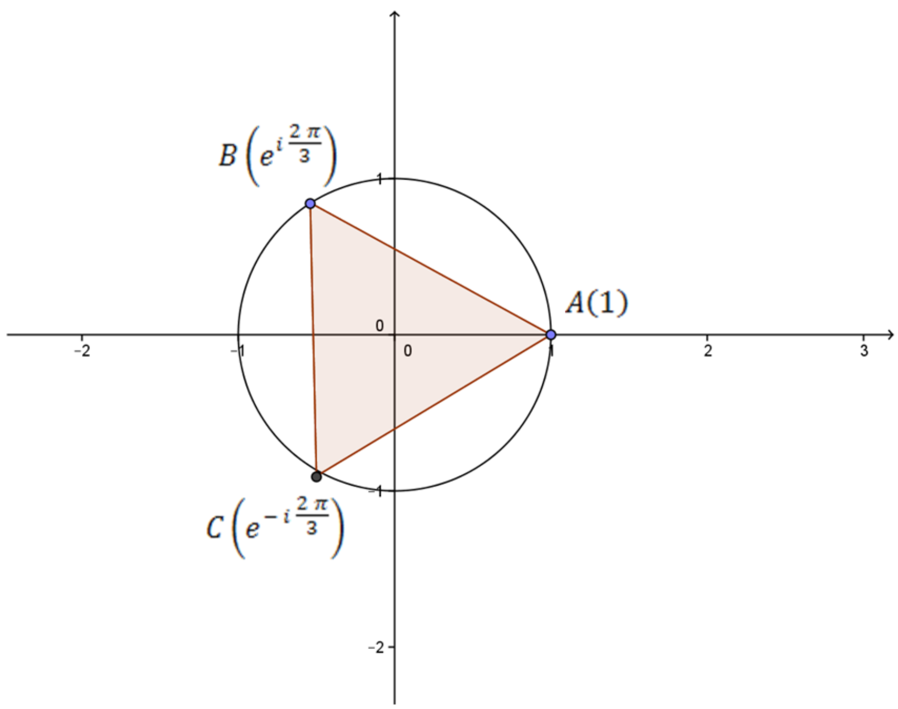
$$z_1 = \frac{-1 - i\,\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_2 = \frac{-1 + i\,\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

L'ensemble de solution est :

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{\mathbf{1}\,;\;\; \boldsymbol{e^{i\frac{2\pi}{3}}}\,;\;\; \boldsymbol{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}\right\}}$$

Il est à noter que les solutions sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 du plan complexe



5) <u>Cas n = 4</u>

$$z^4 = 1 \Leftrightarrow z^4 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$$

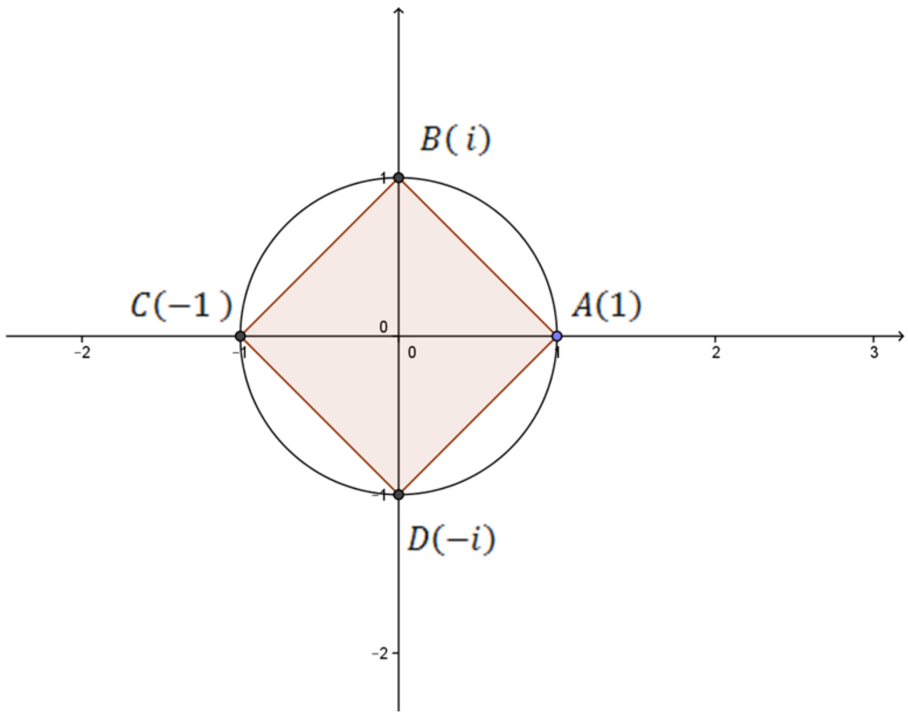
$$\Leftrightarrow (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \ ou \ z = -1 \ ou \ z = i \ ou \ z = -i$$

L'ensemble de solution est :

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \{-\mathbf{1} \ ; \ \mathbf{1} \ ; \ -\boldsymbol{i} \ ; \ \boldsymbol{i}\}}$$

Il est à noter que les solutions sont les affixes des sommets d'un carré inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 du plan complexe



III Résolution générale

Les cas particuliers étudiés ont montré que les solutions correspondaient à des affixes de points se situant sur le cercle de centre O et de rayon 1 du plan complexe. Cela suggère donc une résolution générale en utilisant la forme exponentielle.

Posons donc , avec $r \in]0\ ;\ +\infty[$ car les solutions sont non nulles :

$$z = r\, e^{i\,\alpha}$$

Alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \left(r\, e^{i\,\alpha}\right)^n = 1$$

$$\Leftrightarrow r^n\, e^{i\,n\,\alpha} = 1\, e^{i\,0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = 1 \\ \exists\, k \in \mathbb{Z}\ :\ n\,\alpha = 2\,k\,\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \exists\, k \in \mathbb{Z}\ :\ \alpha = \dfrac{2\,k\,\pi}{n} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} :\ z = e^{i\frac{2\,k\,\pi}{n}}$$

L'ensemble de solution est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{2\,k\,\pi}{n}}\ :\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

Il est à noter que les solutions sont les affixes des sommets d'un polygône régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 du plan complexe.

Vérifions cependant plus rigoureusement qu'il y a exactement n solutions distinctes.

Soit $k \in \mathbb{Z}$ alors , par division euclidienne de k par n :

$$\exists\,(q,r) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\ :\ k = q\,n + r \quad et\ \ 0 \le r \le n-1$$

Ainsi :

$$e^{i\frac{2\,k\,\pi}{n}} = e^{i\frac{2\,(q\,n+r\,)\,\pi}{n}} = e^{i\left(2q\pi + \frac{2\,r\,\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{2\,r\,\pi}{n}}$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{ e^{i\frac{2\,r\,\pi}{n}} \;:\; r \in \mathbb{N} \;\; et \;\; 0 \leq r \leq n-1 \right\} = \left\{ e^{i\,0} \;;\; e^{i\frac{2\,\pi}{n}} \;;\; e^{i\frac{4\,\pi}{n}} \;; \dots ;\; e^{i\frac{2\,(n-1)\,\pi}{n}} \right\}}$$

Reste à prouver que les n solutions précédentes sont bien distinctes deux à deux. Supposons alors :

$$\exists\, (r, r') \in [\![0 \,;\, (n-1)]\!]^2 :\; e^{i\frac{2\,r\,\pi}{n}} = e^{i\frac{2\,r'\,\pi}{n}}$$

Alors :

$$\exists\, k \in \mathbb{Z} :\; \frac{2\,r\,\pi}{n} = \frac{2\,r'\,\pi}{n} + 2\,k\,\pi$$

Donc :

$$2\,r = 2\,r' + 2\,n\,k$$

Soit :

$$r - r' = n\,k$$

D’où :

$$|r - r'| = n\,|k|$$

Or :

$$(r, r') \in [\![0 \,;\, (n-1)]\!]^2 \quad \Rightarrow \quad |r - r'| < n$$

donc

$$n\,|k| < n$$

D’où :

$$|k| = 0$$

Finalement :

$$k = 0$$

Et donc :

$$r = r'$$

Les solutions sont bien distinctes deux à deux.