Puissances

Nous allons aborder la notion de puissances, prélude à la construction de fonctions appelées exponentielles. Les notations et les propriétés seront abordées pour les puissances d'un nombre entier simple, le nombre 2, avant d'être généralisées à un nombre quelconque.

I Puissances de 2

Considérons la suite infinie de nombres entiers, obtenue à partir de 1, par multiplication successive par 2, soit :

$$1;\ 2 ; 2 \times 2 ; 2 \times 2 \times 2 ; 2 \times 2 \times 2 \times 2 ; \ldots$$

Rappelons que des nombres que l'on multiplie sont appelés des **facteurs.**

Lorsque nous allons avoir 1000 facteurs 2, le nombre va être difficile à écrire. Il faut donc trouver une façon de le représenter symboliquement et une façon naturelle est d'indiquer le nombre 2 par lequel on multiplie et que l'on appelle **base**, ainsi que le nombre de facteurs 2. Le symbolisme retenu est le suivant :

$$2 \times 2 = 2^2$$

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$$

$$\cdots$$

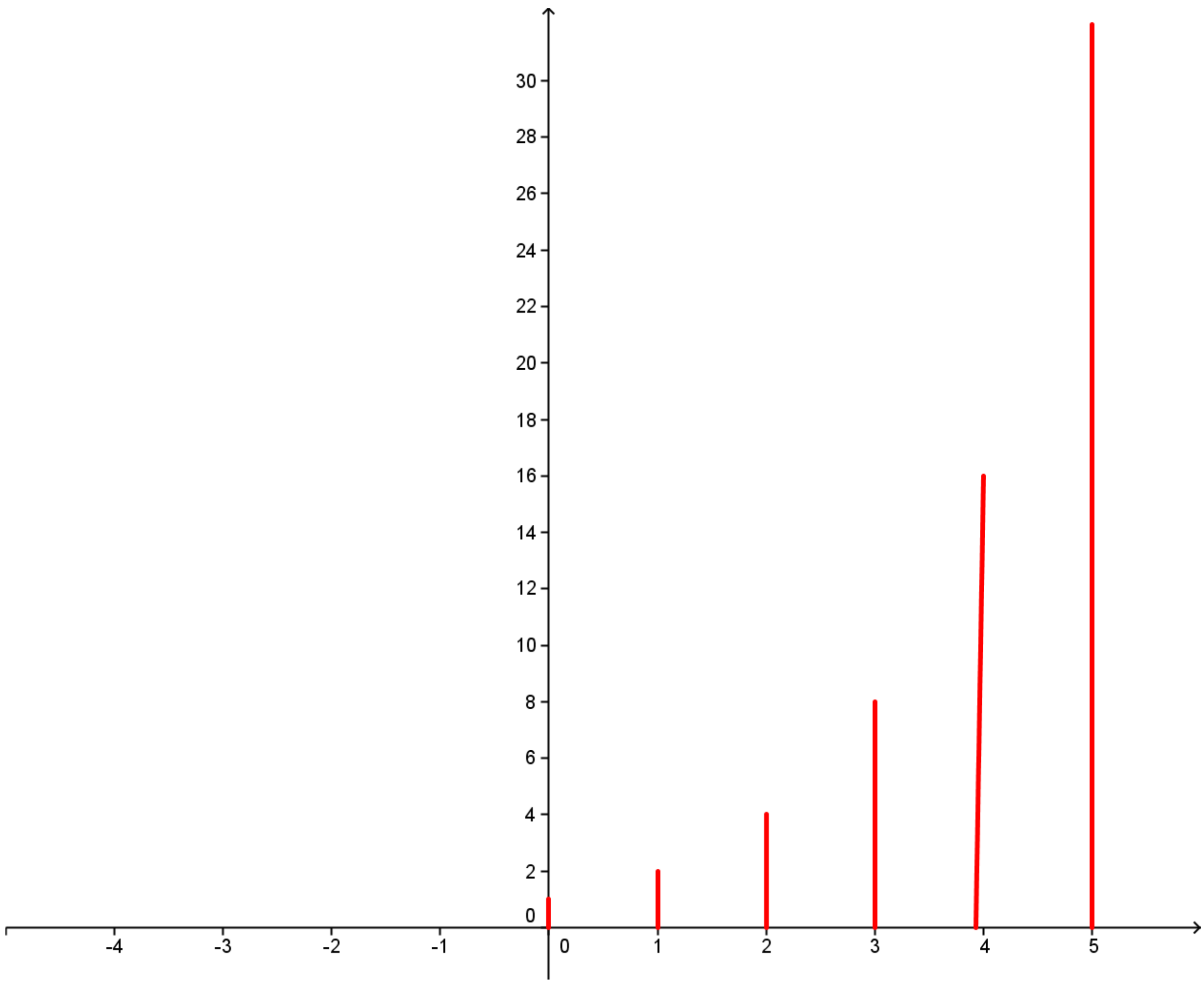
Il est clair qu'un telle action qui consiste à multiplier par deux successivement conduit très vite à de très grand nombres, comme en témoignent les valeurs de la suite initiale :

$$1;\ 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128 ; 256 ; 512 ; 1024 ; 2048 ; 4096 ; 8192 ; 16384 ; \cdots$$

Pour cette raison, il semble naturel de parler de la suite des puissances de 2.

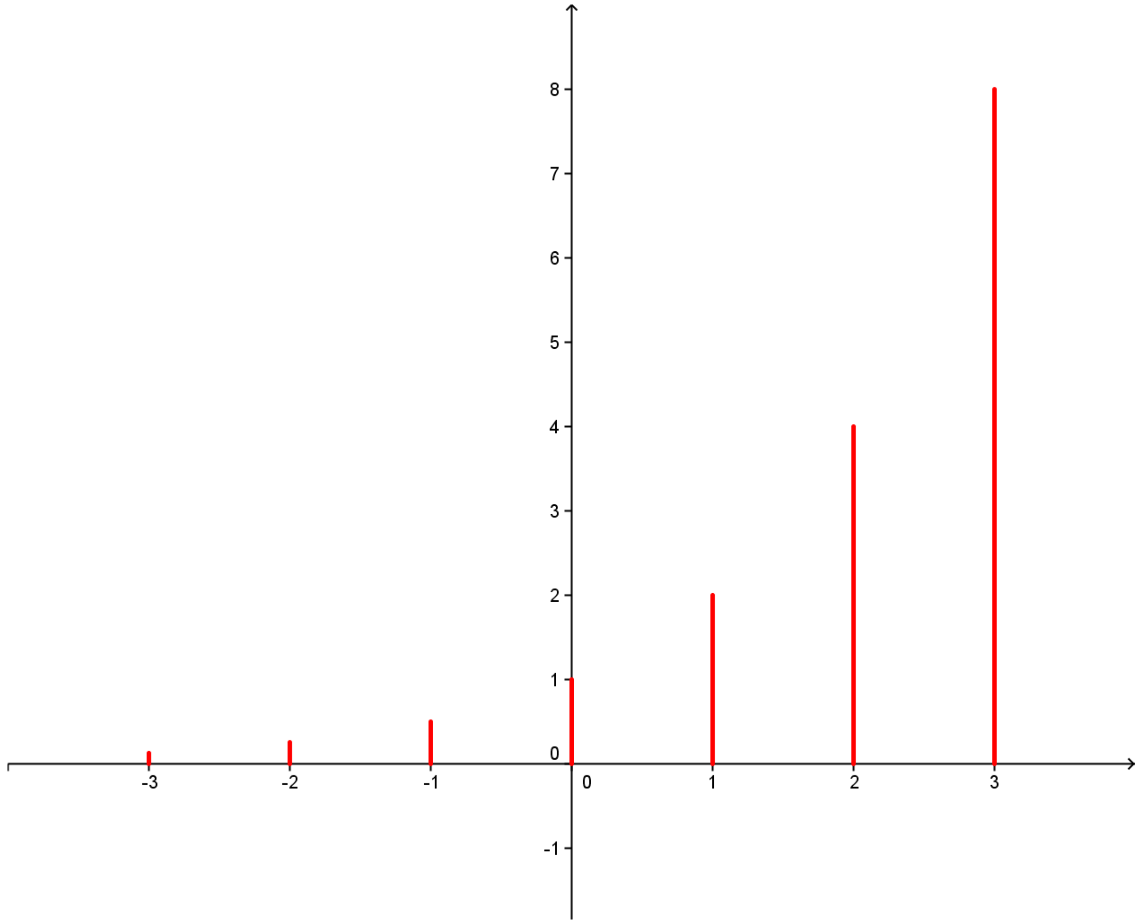
Ainsi 2^4 se lit « **2 puissance 4** ». Mais le 4 étant écrit dans zone d'écriture plus élevée et de taille de caractère plus petite, il est qualifié d'exposant. On peut donc également dire « **2 exposant 4** » et en anglais « **2 exponent 4** ».

Représentons alors graphiquement nos puissances de deux, par des bâtons, avec en abscisse, l'exposant et en ordonnée la puissance de 2 correspondante.



Nous pouvons mieux apprécier la « puissance » de la croissance de ces bâtons quand l'exposant augmente. Au passage, une telle suite de nombres qui progresse par multiplication par un même nombre (ici 2) est qualifiée de **suite géométrique**.

En regardant plus attentivement le graphique, on se dit qu'il y manque quelque chose. Regardez bien. Il y a bien des bâtons dans la région des abscisses positives mais il n'y en a pas dans celle des abscisses négatives. Cela suggère de compléter la suite de manière logique en ajoutant des bâtons vers la gauche, de longueur divisée par deux à chaque fois, ce qui donne :



Mais alors, il vient tout naturellement l'idée de noter :

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$$

$$\dots$$

Ainsi 2^{-3} est un nombre qui est obtenu en divisant 1 successivement trois fois par 2 alors que 2^3 est un nombre qui est obtenu en multipliant 1 successivement trois fois par 2. Les deux nombres sont cependant tous deux strictement positifs.

Retenez bien donc que :

Le signe de l'exposant dans une puissance de 2 indique des multiplications successives par 2 s'il est positif et des divisions successives par 2 s'il est négatif.

Au passage, nous voyons sur le graphique qu'il est naturel de noter :

$$\boxed{2^0 = 1}$$

Voilà un mystère d'éclairci, du moins je l'espère, sur les puissances dites négatives !

Voyons alors un peu plus loin et notamment la commodité de ces notations. Partons de 2^{-3} et multiplions le 5 fois par 2 autrement dit par 2^5. Il est clair sur le graphique que nous passons du bâton à l'abscisse -3 au bâton à l'abscisse $-3 + 5 = 2$. Autrement dit :

$$\boxed{2^{-3} \times 2^5 = 2^{-3+5} = 2^2}$$

Tiens donc, nous voyons une règle se profiler :

Le produit de deux puissances de 2 est une puissance de 2 dont l'exposant est la somme algébrique des exposants des deux premières puissances de 2.

Soit sans blabla : Pour tout entiers relatifs n et m :

$$\boxed{2^n \times 2^m = 2^{n+m}}$$

Vérifiez le bien fondé de cette règle sur le graphique pour :

$$2^{-3} \times 2^{-5} = 2^{-3-5} = 2^{-8}$$

Du coup il est facile d'en déduire une autre règle, celle de la division de puissances de 2 que nous allons aborder sur un exemple :

$$\frac{2^{-3}}{2^5} = \frac{2^{-3} \times 2^{-5}}{2^5 \times 2^{-5}} = \frac{2^{-3-5}}{2^{5-5}} = \frac{2^{-3-5}}{2^0} = \frac{2^{-3-5}}{1} = 2^{-3-5}$$

Autrement dit : Pour tout entiers relatifs n et m :

$$\boxed{\frac{2^n}{2^m} = 2^{n-m}}$$

Mais par la même technique on aurait aussi :

$$\boxed{\frac{2^n}{2^m} = \frac{1}{2^{m-n}}}$$

Notez donc comment l'exposant se balade du numérateur au dénominateur par simple changement de signe.

Voyons alors la notion de puissance de puissance. Il paraît naturel d'étendre les notations précédentes à d'autres bases que 2 par exemple 4. Ainsi :

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

$$\frac{1}{4 \times 4 \times 4} = 4^{-3}$$

Or :

$$4 = 2^2$$

Donc :

$$4^3 = (2^2)^3 = (2^2) \times (2^2) \times (2^2) = 2^{2+2+2}$$

Donc :

$$\boxed{(2^2)^3 = 2^{2\times 3}}$$

Mais du coup :

$$(2^2)^{-3} = \frac{1}{(2^2)^3} = \frac{1}{2^{2\times 3}} = 2^{-2\times 3}$$

Donc :

$$\boxed{(2^2)^{-3} = 2^{2\times(-3)}}$$

De même :

$$(2^{-2})^3 = \left(\frac{1}{2^2}\right)^3 = \frac{1}{2^2}\times\frac{1}{2^2}\times\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2\times 2^2\times 2^2} = \frac{1}{2^{2\times 3}} = 2^{-2\times 3}$$

Soit :

$$\boxed{(2^{-2})^3 = 2^{(-2)\times 3}}$$

On vérifierait de même :

$$\boxed{(2^{-2})^{-3} = 2^{(-2)\times(-3)}}$$

Autrement dit, une règle se profile :

Pour tous entiers relatifs n et m :

$$\boxed{(2^{\mathrm{n}})^{\mathrm{m}} = 2^{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}}$$

Pour les amoureux des belles phrases :

La puissance d'une puissance de 2 est une puissance de 2 dont l'exposant est le produit des exposants des deux premières puissances.

Voilà tout est dit, pour une base égale à 2, vous n'avez plus qu'à transposer à une base quelconque, mais comme je suis de nature compréhensive, je vais vous résumer tout ça, comme dans les manuels ayant pignon sur rue.

II Puissances d'un nombre a quelconque

Soit a un nombre réel quelconque, et n un entier naturel plus grand que 2, on définit la puissance entière naturelle de a par :

$$a^n = a \times a \times \cdots \times a$$

$$\text{si } a \neq 0 \ : \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \times a \times \cdots \times a}$$

où le facteur a apparaît n fois.

Par convention on pose :

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Les propriétés s'en déduisent :

Pour tous entiers relatifs n et m

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^{n-m}}{1} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

$$(a^n)^m = a^{n\times m}$$

Reprenez la démarche faite avec $a = 2$ pour en faire la preuve selon toutes les possibilités de signe de n et de m.

III Puissances fractionnaires d'un nombre a quelconque

Nous pouvons aller plus loin dans les notations judicieuses. En effet, considérons la relation définissant la racine carrée d'un nombre positif ou nul :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$$

Il est alors tentant d'écrire cette relation sous la forme :

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a$$

Avec à l'esprit le principe d'ajouter les exposants.

Cela amène à noter :

$$\boxed{\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}}$$

On peut reprendre cette approche avec la racine cubique d'un nombre a réel quelconque :

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = a$$

Que l'on aimerait logiquement écrire :

$$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a$$

Ce qui amène à noter :

$$\boxed{\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}}$$

Et de manière générale, pour n entier naturel non nul :

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

Afin de conserver les propriétés des puissances entières relatives présentées précédemment, nous sommes également amenés à noter, pour n entier naturel non nul et m entier relatif :

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

Ainsi :

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^{5} = a^{\frac{5}{3}}$$

Problème : ces notations sont elles compatibles avec toutes les propriétés des puissances entières relatives, ce qui est quand même le but d'une notation. La réponse est oui comme nous allons le montrer.

Mais nous allons le faire à partir d'exemples pour ne pas noyer le lecteur fâché avec trop d'abstractions mathématiques. Il suffira pour les autres de remplacer les exposants concrets par des lettres.

Partons de cette propriété relative aux racines :

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^{5} = \sqrt[3]{a^{5}}$$

Nous avons donc :

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^{5} = (a^{5})^{\frac{1}{3}}$$

Donc :

$$\boxed{(a^{5})^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{5} = a^{\frac{5}{3}}}$$

Ouf ! C'est plutôt rassurant, on peut échanger l'ordre des exposants dans une puissance de puissance comme dans le cas d'exposants entiers relatifs.

Nous avons donc :

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m} = (a^{m})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}}$$

Formule valable pour tous les nombres réels a si n est impair et seulement pour les nombres réels a positifs ou nuls si n est pair.

Examinons alors les autres propriétés :

Soient donc n et n’ deux entiers naturels non nuls et m et m’, deux entiers relatifs, a étant un réel compatible avec la parité de n et n’. Alors :

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m\,n'}{n\,n'}} \times a^{\frac{n\,m'}{n\,n'}} = \left(\sqrt[n\,n']{a}\right)^{m\,n'} \times \left(\sqrt[n\,n']{a}\right)^{n\,m'} = \left(\sqrt[n\,n']{a}\right)^{m\,n'+n\,m'}$$

Donc :

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m\,n'+n\,m'}{n\,n'}}$$

Soit finalement :

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}}}$$

Et chouette alors ! Ca fonctionne. La propriété d’ajout des exposants par multiplication de puissances s’étend à des exposants fractionnaires. Heureuse notation !

Mais alors la propriété corrélative de soustraction des exposants par division de puissances s’étend également :

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{m'}{n'}}}$$

Nous voyons là la puissance des notations mathématiques qui permet de manipuler par une même gymnastique des objets qui semblent a priori différents.

Nous verrons dans un autre fichier que les fonctions puissances entières négatives et puissances fractionnaires se dérivent de façon analogue aux fonctions puissances entières naturelles.

Ainsi pour la fonction définie sur ℝ par :

$$\boxed{f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^5 = x^{\frac{5}{3}}}$$

la fonction dérivée sera définie sur ℝ par :

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}\,x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$$

Encore un bonheur collatéral des notations mathématiques. Si après ça vous ne sentez toujours pas qu'il y a un ordre sublime dans l'univers et que les Mathématiques sont une des voies qui permet d'y accéder ! Mais encore faut-il se donner la peine de mettre les choses dans l'ordre et ne pas se contenter de répéter des formules comme des perroquets.

III Puissances de 10

Une base joue un rôle dominant dans notre système de comptage. C'est la base 10, à l'origine du système décimal. Les puissances de 10 forment les super divisions et sous division de l'unité. Ainsi

$$10^0 = 1 \text{ est l'unité}$$

$$10^1 = 10 \text{ est la dizaine}$$

$$10^2 = 100 \text{ est la centaine}$$

$$10^3 = 1\,000 \text{ est le millier}$$

$$10^6 = 1\,000\,000 \text{ est le million}$$

$$10^9 = 1\,000\,000\,000 \text{ est le milliard}$$

Voilà pour les super unités, et croyez moi, avec notre manie de scruter l'univers dans ses profondeurs célestes, nous avons bien besoin de toutes ces puissances pour décrire les longueurs que nous considérons en mètres.

Voyons maintenant les sous unités dont nous avons besoin également pour décrire jusqu'à la taille des molécules :

$$10^{-1} = 1/10 \text{ est le dixième}$$

$$10^{-2} = 1/100 \text{ est le centième}$$

$$10^{-3} = 1/1\,000 \text{ est le millième}$$

$$10^{-6} = 1/1\,000\ \ 000 \text{ est le millionième}$$

$$10^{-9} = 1/1\,000\ \ 000\,000 \text{ est le milliardième}$$

Il est alors facile de manipuler les nombres décimaux à partir de l'échelle des puissances de 10 que nous venons d'établir. Prenons par exemple le nombre 134,569 et écrivons le en faisant apparaître la signification de ses chiffres en termes de puissance de 10 :

$$134{,}569 = 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3}$$

Ecrit ainsi, nous pouvons aisément décrire ce nombre sur n'importe laquelle de ses puissances de 10. Ainsi :

$$134{,}569 = 13{,}4569 \times 10^1$$

$$134{,}569 = 1{,}34569 \times 10^2$$

$$134{,}569 = 1345{,}69 \times 10^{-1}$$

Parmi ces trois descriptions, la seconde présente l'avantage de faire apparaître la puissance de 10 la plus proche, en l'occurence 10^2. On l'appelle la **notation scientifique**.

Voici quelques exemples de notations scientifiques de décimaux :

$$0{,}0045 = 4{,}5 \times 10^{-3}$$

$$12\,000 = 1{,}2 \times 10^4$$

L'avantage d'utiliser l'échelle des puissances de 10 apparaît également lorsqu'on veut additionner des nombres décimaux exprimés dans des puissances de 10 différentes. Ainsi

$$\mathrm{A} = 0{,}25 \times 10^{-9} + 13 \times 10^{-10} + 4{,}2 \times 10^{-8}$$

Pour effectuer l'opération, il faut décrire les trois nombres à additionner dans la même puissance et pour cela, regarder pour chaque nombre les chiffres de plus petit poids (les plus à droite).

Dans 0,25, le chiffre de plus petit poids est le 5, il correspond à une puissance de 10 qui est 10^{-2} mais comme il est multiplié par 10^{-9} , cela fera au final une puissance de 10 qui est 10^{-11}.

Pour le second nombre, c'est 3 le chiffre de plus petit poids et au final, il correspondra à une puissance de 10 qui sera 10^{-10}.

Pour le troisième nombre enfin, c'est 2 le chiffre de plus petit poids et au final, il correspondra à une puissance de 10 qui sera $10^{-1} \times 10^{-8} = 10^{-9}$.

Sur les trois nombres, c'est le premier qui a donc le chiffre associé à la plus petite puissance de 10 qui est 10^{-11}. C'est donc sur cette puissance qu'on effectue la conversion. Cela donne :

$$\mathrm{A} = 25 \times 10^{-11} + 130 \times 10^{-11} + 4200 \times 10^{-11}$$

Nous pouvons donc ajouter les nombres entiers devant les puissances de 10 :

$$\mathrm{A} = 4355 \times 10^{-11}$$

Et convertir finalement en notation scientifique :

$$\mathrm{A} = 4{,}355 \times 10^{-8}$$

Et voilà, le tour est joué !