Produit vectoriel et déterminant dans l'espace

Nous allons présenter deux outils permettant de calculer l'aire d'une surface plane de l'espace, ainsi que le volume d'un parallélépipède.

L'idée est d'étendre la notion de déterminant développée dans le fichier intitulé : « les invariants scalaires du plan » en observant les propriétés de ce dernier concept.

Déterminant de deux vecteurs du plan en base orthonormée - Rappels

Rappelons donc que nous avions défini, dans un plan, le déterminant dans une base $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ quelconque, par la formule suivante :

Pour :

$$\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \quad et \quad \vec{v} = x'\,\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$$

$$det_{(\vec{\imath};\,\vec{\jmath})}(\vec{u};\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x\,y' - y\,x'$$

Rappelons également que nous avions montré que ce déterminant avait la même valeur dans toutes les bases orthonormées directes. Nous conviendrons alors de le noter simplement $det(\vec{u};\ \vec{v})$.

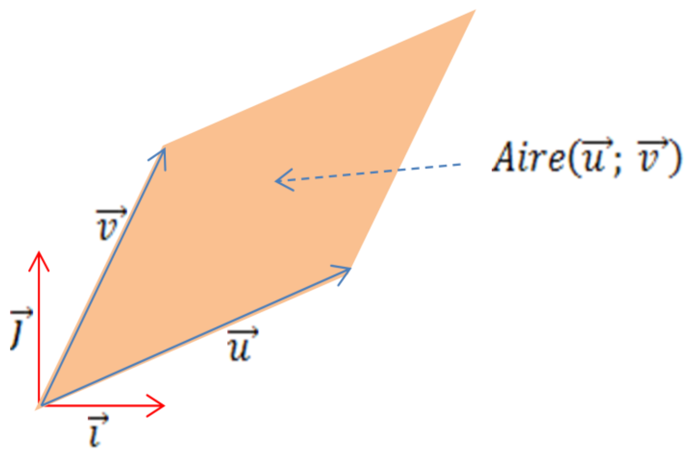
Interprétation géométrique du déterminant de deux vecteurs du plan

En notant $Aire(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ l'aire du parallélogramme formé sur $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$, l'unité d'aire étant définie par la base orthonormée $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$:

$$det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = Aire(\vec{u}\,;\,\vec{v})\ si\ (\vec{u}\,;\,\vec{v})\ et\ (\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})\ de\ même\ orientation$$

$$det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = -Aire(\vec{u}\,;\,\vec{v})\ si\ (\vec{u}\,;\,\vec{v})\ et\ (\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})\ d'orientations\ contraires$$

$$det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0 \text{ si et seulement si } \vec{u}\ et \vec{v}\ sont\ colinéaires\ (liés)$$



Propriétés du déterminant de deux vecteurs du plan

α étant un réel quelconque

- Linéarité par rapport au premier vecteur

$$det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath})}(\vec{u}+\vec{u}';\ \vec{v}) = det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath})}(\vec{u};\vec{v}) + det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath})}(\vec{u}';\ \vec{v})$$

$$det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath})}(\alpha\,\vec{u};\ \vec{v}) = \alpha\ det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath})}(\vec{u};\vec{v})$$

- Linéarité par rapport au second vecteur

$$det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath})}(\vec{u};\ \vec{v}+\vec{v}') = det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath})}(\vec{u};\vec{v}) + det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath})}(\vec{u};\ \vec{v}')$$

$$det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath})}(\vec{u};\alpha\,\vec{v}) = \alpha\ det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath})}(\vec{u};\vec{v})$$

- Caractère dit alterné

$$det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath})}(\vec{u};\ \vec{u}) = 0$$

- Caractère dit antisymétrique (découlant des précédents)

$$det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath})}(\vec{v};\ \vec{u}) = -det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath})}(\vec{u};\ \vec{v})$$

Ces propriétés font qualifier le déterminant de **forme bilinéaire alternée**.

C'est à partir de ces dernières propriétés que nous allons pouvoir construire une notion analogue dans l'espace à trois dimensions, et même l'étendre à des espaces de dimension supérieure, mais ce ne sera pas notre propos ici.

Déterminant de trois vecteurs de l'espace en base orthonormée

Etant donné une base $\left(\vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k}\right)$ de l'espace et trois vecteurs quelconques :

$$\vec{u}=x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}+z\,\vec{k}\ \ ;\ \vec{v}=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}\ ;\ \vec{w}=x"\,\vec{\imath}+y"\,\vec{\jmath}+z"\,\vec{k}$$

Nous cherchons à définir le déterminant de ces trois vecteurs dans la base $\left(\vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k}\right)$ de telle sorte qu'il ait le même type de propriétés que celui défini dans le plan, à savoir que ce soit une **forme tri-linéaire alternée**.

Voyons alors quelle forme il aurait, mais notons pour simplifier les écritures :

$$D(\vec{u};\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})=det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath}\ ;\vec{k})}(\vec{u};\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})$$

Nous devrions avoir en effet, en développant :

$$D(\vec{u};\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})$$

$$=D\left(x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}+z\,\vec{k};\ x'\,\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}\ ;\ x"\,\vec{\imath}+y"\,\vec{\jmath}+z"\,\vec{k}\right)$$

$$=x\,x'x"D(\vec{\imath};\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\imath})+x\,x'y"D(\vec{\imath};\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})+x\,x'z"D\left(\vec{\imath};\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{k}\right)$$

$$+x\,y'x"D(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{\imath})+x\,y'y"D(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{\jmath})+x\,y'z"D\left(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k}\right)$$

$$+x\,z'x"D\left(\vec{\imath};\ \vec{k}\ ;\ \vec{\imath}\right)+x\,z'y"D\left(\vec{\imath};\ \vec{k}\ ;\ \vec{\jmath}\right)+x\,z'z"D\left(\vec{\imath};\ \vec{k}\ ;\ \vec{k}\right)$$

$$+y\,x'x"D(\vec{\jmath};\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\imath})+y\,x'y"D(\vec{\jmath};\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})+y\,x'z"D\left(\vec{\jmath};\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{k}\right)$$

$$+y\,y'x"D(\vec{\jmath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{\imath})+y\,y'y"D(\vec{\jmath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{\jmath})+y\,y'z"D\left(\vec{\jmath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k}\right)$$

$$+y\,z'x"D\left(\vec{\jmath};\ \vec{k}\ ;\ \vec{\imath}\right)+y\,z'y"D\left(\vec{\jmath};\ \vec{k}\ ;\ \vec{\jmath}\right)+y\,z'z"D\left(\vec{\jmath};\ \vec{k}\ ;\ \vec{k}\right)$$

$$+z\,x'x"D\left(\vec{k};\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\imath}\right)+z\,x'y"D\left(\vec{k};\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\right)+z\,x'z"D\left(\vec{k};\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{k}\right)$$

$$+z\,y'x"D\left(\vec{k};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{\imath}\right)+z\,y'y"D\left(\vec{k};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{\jmath}\right)+z\,y'z"D\left(\vec{k};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k}\right)$$

$$+z\,z'x"D\left(\vec{k};\ \vec{k}\ ;\ \vec{\imath}\right)+z\,z'y"D\left(\vec{k};\ \vec{k}\ ;\ \vec{\jmath}\right)+z\,z'z"D\left(\vec{k};\ \vec{k}\ ;\ \vec{k}\right)$$

Eliminons alors tous les termes où il y a au moins deux vecteurs, sur les trois, identiques (caractère alterné). Il vient :

$$D(\overrightarrow{u};\ \vec{v}\ ;\ \overrightarrow{w})$$

$$= x\, y'z"D\left(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k}\right)+ x\, z'y"D\left(\vec{\imath};\ \vec{k}\ ;\ \vec{\jmath}\right) + y\, x'z"D\left(\vec{\jmath};\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{k}\right)$$

$$+ y\, z'x"D\left(\vec{\jmath};\ \vec{k}\ ;\ \vec{\imath}\right)+ z\, x'y"D\left(\vec{k};\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\right) + \ z\, y'x"D\left(\vec{k};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{\imath}\right)$$

Appliquons alors le caractère antisymétrique, qui doit changer le signe du déterminant en échangeant les places de deux vecteurs. Il vient :

$$D(\overrightarrow{u};\ \vec{v}\ ;\ \overrightarrow{w})$$

$$= x\, y'z"\ D\left(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k}\right) -\ x\, z'y"\ D\left(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k}\right) - y\, x'z"D\left(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k}\right)$$

$$+ y\, z'x"\ D\left(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k}\right)+ z\, x'y"\ D\left(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k}\right) -\ z\, y'x"D\left(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k}\right)$$

Soit en factorisant :

$$D(\overrightarrow{u};\ \vec{v}\ ;\ \overrightarrow{w})$$

$$= (x\, y'z"\ -\ x\, z'y"\ - y\, x'z" +\ y\, z'x" + z\, x'y" -\ z\, y'x")\ D\left(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k}\right)$$

Nous sommes ainsi conduits à poser :

$$\boxed{det_{(\vec{\imath};\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})}(\overrightarrow{u};\ \vec{v}\ ;\ \overrightarrow{w}) = x\, y'z"\ -\ x\, z'y"\ - y\, x'z" +\ y\, z'x" + z\, x'y" -\ z\, y'x"}$$

Nous allons cependant en améliorer la lisibilité en notant, par factorisation, que :

$$det_{(\vec{\imath};\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})}(\overrightarrow{u};\ \vec{v}\ ;\ \overrightarrow{w}) = x\ (y'z" - z'y")\ - y\ (x'z" - z'x") + z\ (x'y" -\ y'x")$$

Cette forme fait apparaître des déterminants d'ordre deux et est intéressante à ce titre. Nous pouvons l'écrire ainsi :

$$det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})}(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{w}) = x\begin{vmatrix} y' & y" \\ z' & z" \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x" \\ z' & z" \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x" \\ y' & y" \end{vmatrix}$$

Nous noterons alors le déterminant sous la forme :

$$det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})}(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x" \\ y & y' & y" \\ z & z' & z" \end{vmatrix}$$

Il est alors aisé de vérifier que cette expression est une forme tri-linéaire alternée. Reste à montrer qu'elle a la même expression dans toutes les bases orthonormées directes de l'espace.

Remarquons que la factorisation aurait pu être effectuée par rapport à n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne.

Ainsi, en sélectionnant la deuxième ligne, on a :

$$det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})}(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{w}) = -y\begin{vmatrix} x' & x" \\ z' & z" \end{vmatrix} + y'\begin{vmatrix} x & x" \\ z & z" \end{vmatrix} - y"\begin{vmatrix} x & x' \\ z & y' \end{vmatrix}$$

Cependant, il faut prendre garde à affecter d'une signe, les éléments d'une ligne ou d'une colonne servant de coefficients aux sous déterminants d'ordre deux.

Les signes sont définis par ce tableau :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Invariance du déterminant de trois vecteurs de l'espace en base orthonormée directe

Notons d'abord la propriété remarquable du déterminant, développée précédemment.

Nous avons vu que le caractère tri-linéaire alterné conduisait, en considérant deux bases de l'espace $(\vec{\imath};\, \vec{\jmath};\, \vec{k})$ et $(\vec{I};\, \vec{J};\, \vec{K})$ et trois vecteurs, développés sur ces bases :

$$\begin{cases} \vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} = X\,\vec{I} + Y\,\vec{J} + Z\,\vec{K} \\ \vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k} = X'\,\vec{I} + Y'\,\vec{J} + Z'\,\vec{K} \\ \vec{w} = x"\,\vec{\imath} + y"\,\vec{\jmath} + z"\,\vec{k} = X"\,\vec{I} + Y"\,\vec{J} + Z"\,\vec{K} \end{cases}$$

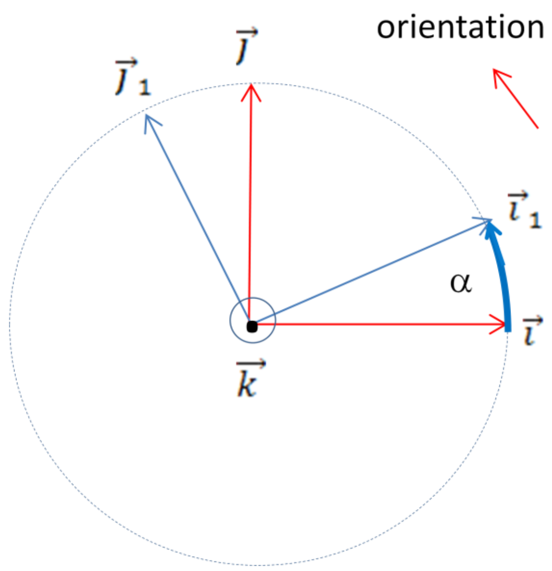
à :

$$\boxed{det_{(\vec{\imath};\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})}(\vec{u};\, \vec{v}\,;\, \vec{w}) = det_{(\vec{I};\,\vec{J};\,\vec{K})}(\vec{u};\, \vec{v}\,;\, \vec{w}) \times det_{(\vec{\imath};\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})}(\vec{I};\, \vec{J};\, \vec{K})}$$

Cette propriété va être essentielle pour démontrer l'invariance du déterminant en base orthonormée directe.

Considérons en effet deux bases orthonormées directes $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ et $(\vec{I}\,;\vec{J}\,;\vec{K})$. La seconde base peut alors être déduite de la première par la composée de trois rotations de l'espace définies comme suit :

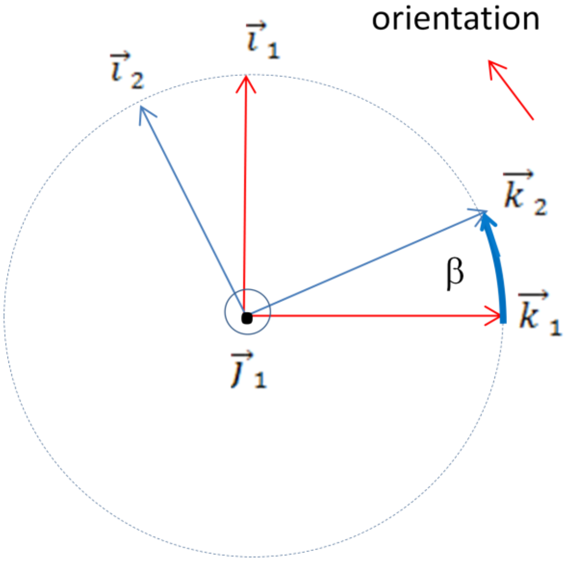
- <u>Rotation d'un angle α autour de $\vec{k}$</u>



Le vecteur $\vec{k}$ oriente le plan de telle sorte que $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est une base directe. Ainsi, la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ se transforme en une base de même orientation $(\vec{\imath}_1;\vec{\jmath}_1;\vec{k}_1)$ telle que :

$$\begin{cases} \vec{\imath}_1 = cos(\alpha)\,\vec{\imath} + sin(\alpha)\,\vec{\jmath} \\ \vec{\jmath}_1 = -\,sin(\alpha)\,\vec{\imath} + cos(\alpha)\,\vec{\jmath} \\ \vec{k}_1 = \vec{k} \end{cases}$$

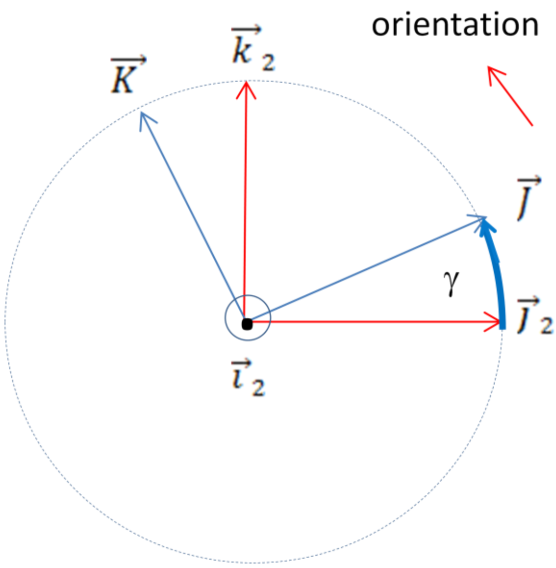
- <u>Rotation d'un angle β autour de $\vec{\jmath}_1$</u>



Le vecteur $\vec{\jmath}_1$ oriente le plan de telle sorte que $(\vec{k}_1; \vec{\imath}_1)$ est une base directe. Ainsi, la base $(\vec{\imath}_1; \vec{\jmath}_1; \vec{k}_1)$ se transforme en une base de même orientation $(\vec{\imath}_2; \vec{\jmath}_2; \vec{k}_2)$ telle que :

$$\begin{cases} \vec{\imath}_2 = -\sin(\beta)\,\vec{k}_1 + \cos(\beta)\,\vec{\imath}_1 \\ \vec{\jmath}_2 = \vec{\jmath}_1 \\ \vec{k}_2 = \cos(\beta)\,\vec{k}_1 + \sin(\beta)\,\vec{\imath}_1 \end{cases}$$

- <u>Rotation d'un angle γ autour de $\vec{\imath}_2$</u>



Le vecteur $\vec{\imath}_2$ oriente le plan de telle sorte que $(\vec{\jmath}_2; \vec{k}_2)$ est une base directe. Ainsi, la base $(\vec{\imath}_2; \vec{\jmath}_2; \vec{k}_2)$ se transforme en notre base de même orientation $(\vec{I}; \vec{J}; \vec{K})$ de départ. Et nous avons :

$$\begin{cases} \vec{I} = \vec{\imath}_2 \\ \vec{J} = cos(\gamma)\,\vec{\jmath}_2 + sin(\gamma)\,\vec{k}_2 \\ \vec{K} = -sin(\gamma)\,\vec{\jmath}_2 + cos(\gamma)\,\vec{k}_2 \end{cases}$$

Il suffit alors de noter l'extension de la propriété précédente sous forme :

$$det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})}(\vec{I};\vec{J};\vec{K}) =$$

$$det_{(\vec{\imath}_2;\vec{\jmath}_2;\vec{k}_2)}(\vec{I};\vec{J};\vec{K}) \times det_{(\vec{\imath}_1;\vec{\jmath}_1;\vec{k}_1)}(\vec{\imath}_2;\vec{\jmath}_2;\vec{k}_2) \times det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})}(\vec{\imath}_1;\vec{\jmath}_1;\vec{k}_1)$$

et que :

$$det_{(\vec{\imath}_2;\vec{\jmath}_2;\vec{k}_2)}(\vec{I};\vec{J};\vec{K}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\gamma) & -sin(\gamma) \\ 0 & sin(\gamma) & cos(\gamma) \end{vmatrix} = 1$$

$$det_{(\vec{\imath}_1;\vec{\jmath}_1;\vec{k}_1)}(\vec{\imath}_2;\vec{\jmath}_2;\vec{k}_2) = \begin{vmatrix} cos(\beta) & 0 & sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\beta) & 0 & cos(\beta) \end{vmatrix} = 1$$

$$det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})}(\vec{\imath}_1;\vec{\jmath}_1;\vec{k}_1) = \begin{vmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

On en déduit :

$$\boxed{det_{(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})}(\vec{I};\vec{J};\vec{K}) = 1}$$

Autrement dit, le déterminant d'une base orthonormée directe dans une autre base orthonormée directe est égal à 1.

Il en résulte la propriété recherchée à savoir, que **le déterminant a la même valeur dans toutes les bases orthonormées directes de l'espace**.

Nous allons pouvoir donc à présent lui trouver une interprétation géométrique.

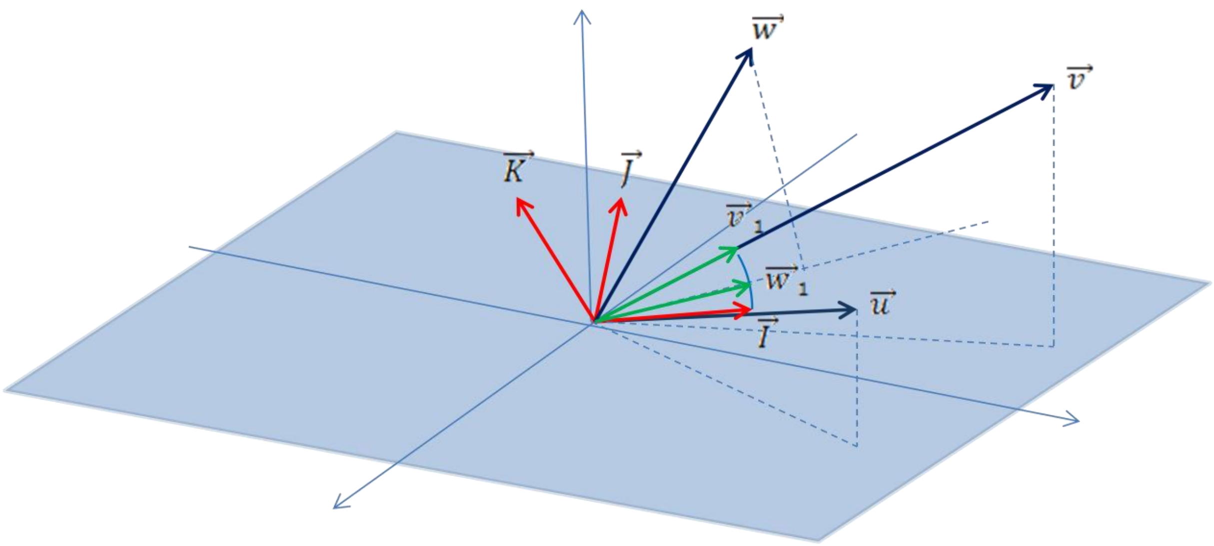
Interprétation géométrique du déterminant de trois vecteurs de l'espace en base orthonormée directe

Etant donné un triplet $(\vec{u}\,;\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})$ de vecteurs du plan non liés. Formons une base orthonormée directe à partir de ces vecteurs comme suit :

$$\vec{I} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\,\vec{u}$$

$$\vec{J} = vecteur\ unitaire\ du\ plan\ (\vec{u}\,;\ \vec{v})\ tel\ que\ \left(\vec{I}\,;\ \vec{J}\right)$$
$$soit\ de\ même\ orientation\ que\ (\vec{u}\,;\ \vec{v}\ )$$

$$\vec{K} = vecteur\ unitaire\ tel\ que\ \left(\vec{I}\,;\ \vec{J}\ ;\ \vec{K}\right)$$
$$soit\ une\ base\ orthonormée\ directe$$



En notant :

- θ l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace
- $\vec{v}_1$ le vecteur unitaire colinéaire à $\vec{v}$ et de même sens
- $\vec{w}_1$ le vecteur unitaire de la projection de $\vec{w}$ dans le plan $(\vec{u};\ \vec{v})$
- α l'angle formé par les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{w}_1$ dans le plan orienté $(\vec{I};\ \vec{J})$
- $\varphi \in [0\,;\pi[$ l'angle d'espace formé par les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{K}$

On a :

$$\begin{cases} \vec{u} = \|\vec{u}\|\ \vec{I} \\ \vec{v} = \|\vec{v}\|\ \vec{v}_1 \\ \vec{w} = \|\vec{w}\|\ sin(\varphi)\ \vec{w}_1 + \|\vec{w}\|\ cos(\varphi)\ \vec{K} \end{cases}$$

Soit, en faisant apparaître les composantes dans la base $(\vec{I};\ \vec{J}\ ;\ \vec{K})$:

$$\begin{cases} \vec{u} = \|\vec{u}\|\ \vec{I} + 0\,\vec{J} + 0\ \vec{K} = \\ \vec{v} = \|\vec{v}\|\ cos(\theta)\ \vec{I} + \|\vec{v}\|\ sin(\theta)\,\vec{J} + 0\ \vec{K} \\ \vec{w} = \|\vec{w}\|\ sin(\varphi)\ cos(\alpha)\ \vec{I} + \|\vec{w}\|\ sin(\varphi)\ sin(\alpha)\,\vec{J} + \|\vec{w}\|\ cos(\varphi)\ \vec{K} \end{cases}$$

On en déduit :

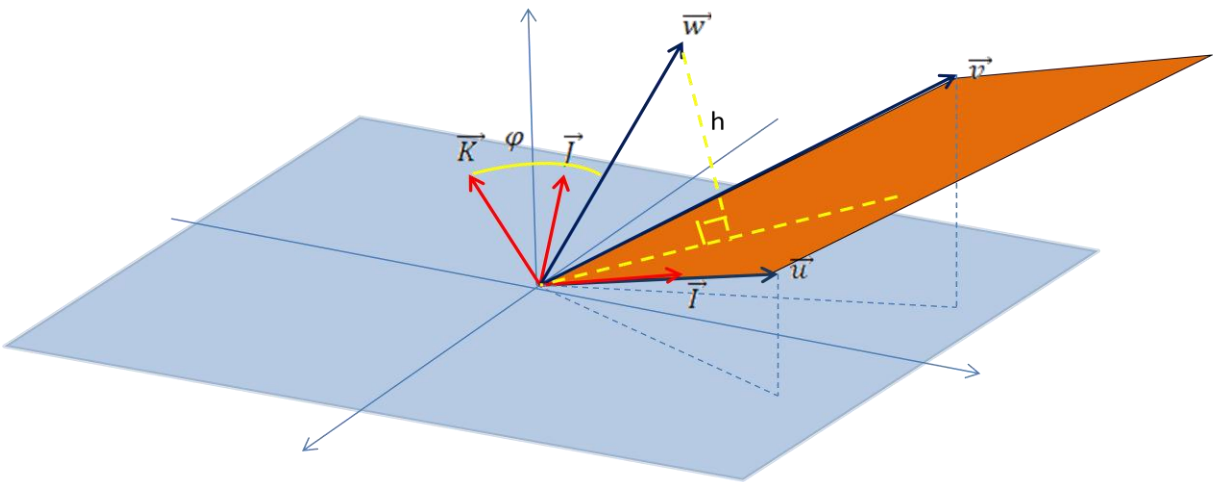
$$det(\vec{u};\ \vec{v}\ ;\ \vec{w}) = det_{(\vec{I}\,;\,\vec{J}\,;\,\vec{K})}(\vec{u};\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})$$

$$= \begin{vmatrix} \|\vec{u}\| & \|\vec{v}\|\ cos(\theta) & \|\vec{w}\|\ sin(\varphi)\ cos(\alpha) \\ 0 & \|\vec{v}\|\ sin(\theta) & \|\vec{w}\|\ sin(\varphi)\ sin(\alpha) \\ 0 & 0 & \|\vec{w}\|\ cos(\varphi) \end{vmatrix}$$

Soit :

$$\boxed{det(\vec{u}\,;\,\vec{v}\,;\,\vec{w}) = \|\vec{u}\|\;\|\vec{v}\|\;sin(\theta)\;\|\vec{w}\|\;cos(\varphi)}$$

Interprétons les divers éléments :



Si nous notons $Aire(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ l'aire du parallélogramme formé sur $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ (en orangé sur la figure) et h la hauteur du parallélépipède formé sur $(\vec{u}\,;\,\vec{v}\,;\,\vec{w})$, nous avons :

$$\boxed{Aire(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \|\vec{u}\|\;\|\vec{v}\|\;sin(\theta)}$$

Si $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{w})$ est une base directe, c'est-à-dire : $\varphi\ \in\ \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, alors :

$$\boxed{cos(\varphi) > 0 \quad et \quad h = \|\overrightarrow{w}\|\ cos(\varphi)}$$

Si $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{w})$ est une base indirecte, c'est-à-dire : $\varphi\ \in\ \left]\frac{\pi}{2}\ ;\pi\right]$, alors :

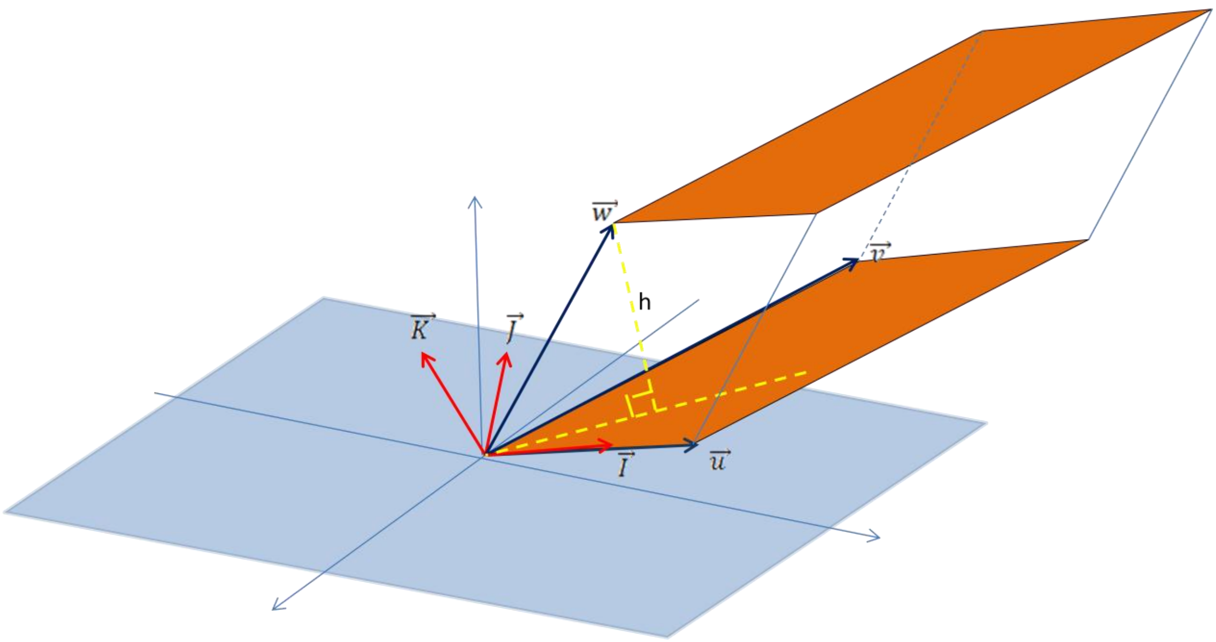
$$\boxed{cos(\varphi) < 0 \quad et \quad h = -\|\overrightarrow{w}\|\ cos(\varphi)}$$

En notons alors $V(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{w})$ le volume du parallélépipède formé sur $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{w})$, nous avons alors :

$$\boxed{\begin{array}{c} si\ (\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{w})\ base\ directe : \\ det(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{w}) = V(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{w}) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} si\ (\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{w})\ base\ indirecte\ directe : \\ det(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{w}) = -V(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{w}) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} si\ (\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{w})\ liée : \\ det(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{w}) = 0 \end{array}}$$



Nous retiendrons :

Le déterminant en base orthonormée définit, par son signe, l’orientation d’un triplet de vecteurs, et par sa valeur absolue, le volume du parallélépipède formé sur ces vecteurs. Le déterminant est donc nul si et seulement si ce volume est nul, donc les trois vecteurs coplanaires.

Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace

Reprenons l'expression du déterminant de trois vecteurs de l'espace et notons que :

$$\|\overrightarrow{w}\| \, cos(\varphi) = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{K}$$

Ainsi :

$$det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}) = Aire(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) \times \left(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{K}\right)$$

Soit :

$$\boxed{det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}) = \left(Aire(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})\,\overrightarrow{K}\right) \cdot \overrightarrow{w}}$$

Nous posons alors :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = Aire(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})\,\overrightarrow{K}}$$

Ce vecteur est appelé **produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$**, compte tenu de ses propriétés détaillées plus loin.

Ainsi :

$$\boxed{det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}}$$

Voyons son expression analytique dans une base orthonormée quelconque $\left(\vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k}\right)$ en développant le déterminant sur sa dernière colonne :

$$det(\vec{u};\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})$$
$$= \begin{vmatrix} x & x' & x" \\ y & y' & y" \\ z & z' & z" \end{vmatrix}$$
$$= x" \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - y" \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} + z" \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

Nous reconnaissons le produit scalaire d'un vecteur par $\vec{w}$. Il en résulte :

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}}$$

Une manière commode de déterminer les coordonnées du produit vectoriel est de reproduire les coordonnées des deux vecteurs en colonne comme suit :

$$\begin{matrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \\ x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{matrix}$$

On raye alors la première ligne. La première coordonnée est le déterminant d'ordre deux qui suit. On raye la deuxième ligne. La deuxième coordonnée est le déterminant d'ordre deux qui suit. On raye la troisième ligne. La troisième coordonnée est le déterminant d'ordre deux qui suit.

Propriétés du produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace

Bien prendre garde, que contrairement au produit scalaire, qui d'ailleurs est un nombre et pas un vecteur, le produit vectoriel n'est pas commutatif. En effet, changer l'ordre des vecteurs, change le signe du produit :

$$\boxed{\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}}$$

- <u>Bilinéarité</u>

$$\boxed{\begin{array}{c}(\vec{u}+\vec{u}') \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}' \wedge \overrightarrow{v} \\ (\alpha \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \alpha \times (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}') = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}' \\ \overrightarrow{u} \wedge (\alpha \overrightarrow{v}) = \alpha \times (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})\end{array}}$$

- Colinéarité de deux vecteurs de l'espace

$$\boxed{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{u};\, \overrightarrow{v})\ li\acute{e}e}$$

Dérivée d'un produit vectoriel

Supposons deux fonctions vectorielles $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ dérivables sur un même intervalle I, alors leur produit vectoriel est une fonction dérivable sur I et :

$$\boxed{\frac{d\,(\vec{u} \wedge \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Ce qui s'apparente à la dérivée de leur produit scalaire qui est, rappelons le :

$$\boxed{\frac{d\,(\vec{u} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

<u>Preuve</u> :

Elle résulte des propriétés précédentes :

Fixons t dans l'intervalle I et prenons h tel que t+h soit dans I. Alors :

$$\frac{\vec{u}(t+h) \wedge \vec{v}(t+h) - \vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)}{h}$$

$$= \frac{\big(\vec{u}(t+h) - \vec{u}(t) + \vec{u}(t)\big) \wedge \vec{v}(t+h) - \vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)}{h}$$

$$= \frac{\big(\vec{u}(t+h) - \vec{u}(t)\big) \wedge \vec{v}(t+h) + \vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t+h) - \vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)}{h}$$

$$= \frac{\big(\vec{u}(t+h) - \vec{u}(t)\big) \wedge \vec{v}(t+h) + \vec{u}(t) \wedge \big(\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)\big)}{h}$$

$$= \left(\frac{\vec{u}(t+h) - \vec{u}(t)}{h}\right) \wedge \vec{v}(t+h) + \vec{u}(t) \wedge \left(\frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h}\right)$$

Le passage à la limite quand h tend vers 0 donne le résultat.

La même démarche, reposant sur la transformation dite d'Abel, donnerait le résultat concernant le produit scalaire.