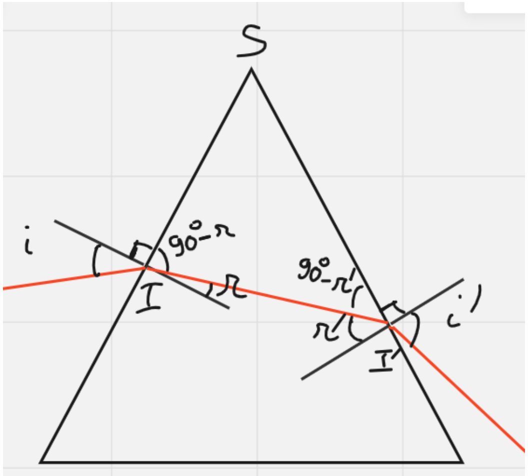
Mesure d'un indice de réfraction à l'aide d'un prisme

On considère un prisme fait dans un matériau homogène, un verre par exemple, d'indice de réfraction n pour une radiation de longueur d'onde dans le vide λ.

Un rayon de longueur d'onde dans le vide λ émis par un laser se réfracte en un point I d'une face latérale du prisme. L'angle d'incidence est noté i et l'angle de réfraction r. Le rayon réfracté se réfracte à nouveau en un point I' d'une face latérale adjacente L'angle d'incidence est noté r' et l'angle de réfraction i' (voir schéma ci-dessous dans le plan d'incidence qui est un plan parallèle aux deux bases du prisme). L'angle formé par les deux faces du prisme impliquées est noté $\hat{S}$.



On s'intéresse à la déviation D définie comme l'angle entre le rayon incident et le rayon émergent du prisme.

Pour cela, on dispose de 4 relations :

<u>La loi de Snell-Descartes à l'interface d'entrée au point I.</u>

$$n_{air}\, sin(i) = n\, sin(r)$$

Sachant que $n_{air} = 1{,}0$:

$$\boxed{sin(i) = n\, sin(r)}$$

<u>La relation géométrique entre les trois angles du triangle S, I, I' :</u>

$$\hat{S} + \hat{I} + \hat{I'} = 180°$$

$$\hat{S} + (90° - r) + (90° - r') = 180°$$

$$\boxed{\hat{S} = r + r'}$$

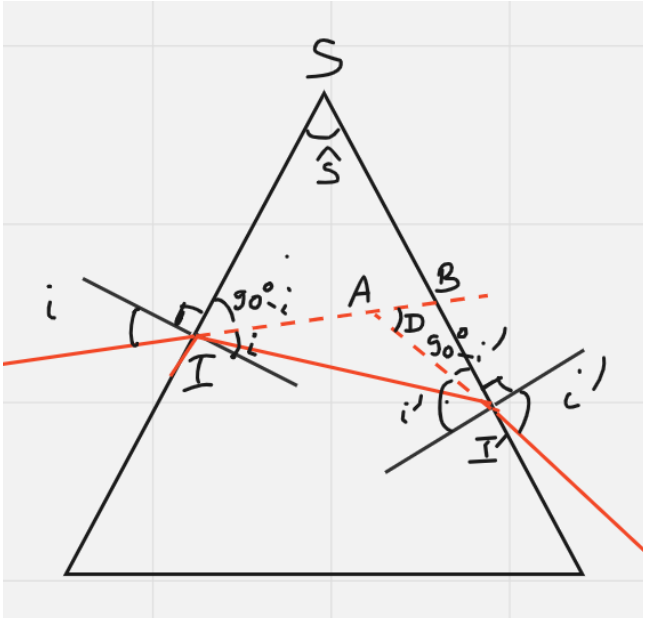
La loi de Snell-Descartes à l'interface de sortie au point I'.

$$n\ sin(r') = n_{air}\ sin(i')$$

Soit :

$$\boxed{n\ sin(r') = \ sin(i')}$$

La relation géométrique entre les trois angles des triangles S, I, B et A, B, I'



$$\begin{cases} D + (90° - i') + \hat{B} = 180° \\ \hat{S} + (90° - i) + \left(180° - \hat{B}\right) = 180° \end{cases}$$

On tire de la première :

$$180° - \hat{B} = D + (90° - i')$$

Que l'on reporte dans la seconde :

$$\hat{S} + (90° - i) + D + (90° - i') = 180°$$

Ce qui donne :

$$\boxed{D = i + i' - \hat{S}}$$

Conditions d'émergence :

La condition pour qu'un rayon émerge du prisme en I' est que r' soit inférieur ou égal à un angle r'_{lim} tel que le rayon émergent soit rasant ($i' = 90°$) soit :

$$n\ sin(r'_{lim}) = \ sin(90°) = 1$$

Donc :

$$r'_{lim} = sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

On doit donc avoir :

$$r = \hat{S} - r' \geq \hat{S} - sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Et donc i doit être supérieur ou égal à un angle i_0 tel que :

$$sin(i_0) = n\ sin\left(\hat{S} - sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Soit :

$$\boxed{i_0 = sin^{-1}\left(n\ sin\left(\hat{S} - sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)}$$

La condition d'émergence est donc :

$$i \in [i_0; 90°]$$

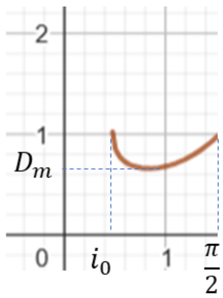
Formule donnant la déviation

$$D = i + i' - \hat{S} = i + sin^{-1}\big(n\ sin(r')\big) - \hat{S} = i + sin^{-1}\left(n\ sin\big(\hat{S} - r\big)\right) - \hat{S}$$

Donc :

$$\boxed{D = i + sin^{-1}\left(n\ sin\left(\hat{S} - sin^{-1}\left(\frac{sin(i)}{n}\right)\right)\right) - \hat{S}}$$

On peut tracer cette fonction sur un exemple numérique à l'aide d'un traceur de courbe en prenant $\hat{S} = 60° = \frac{\pi}{3}\ rad, n = 1{,}5$, ce qui donne :



On voit sur cet exemple que la fonction D présente un minimum atteint en un point intérieur unique de l'intervalle $[i_0; 90°]$ ce que va confirmer en toute généralité l'analyse mathématique rigoureuse qui suit.

Déviation minimale

On étudie la fonction $D(i)$ en calculant sa dérivée :

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$$

Or en dérivant les relations précédentes, on a :

$$n\ \frac{dr'}{di}\ cos(r') = \frac{di'}{di}\ cos(i')$$

$$\frac{dr}{di} + \frac{dr'}{di} = 0$$

$$cos(i) = n\frac{dr}{di}\ cos(r)$$

On en tire :

$$\frac{di'}{di} = n\ \frac{dr'}{di}\ \frac{cos(r')}{cos(i')} = -n\ \frac{dr}{di}\ \frac{cos(r')}{cos(i')} = -\frac{cos(i)\cos(r')}{\cos(r)\ cos(i')}$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{dD}{di} = 1 - \frac{cos(i)\cos(r')}{\cos(r)\ cos(i')}}$$

Les valeurs limites sont :

$$\lim_{i\to i_0}\frac{dD}{di} = -\infty\ (car\ \lim_{i\to i_0}\cos(i') = 0^+\ )$$

Donc la fonction $D(i)$ admet une demi tangente verticale à droite en i_0. Comme elle est continue sur $[i_0; 90°]$ elle est donc strictement décroissante au voisinage de i_0.

$$\frac{dD}{di}(90°) = 1 > 0\ (car\ \cos(90°) = 0\ )$$

La fonction est donc strictement croissante au voisinage de i_0.

On en déduit par continuité que D admet un minimum sur l'intervalle $[i_0; 90°]$ et qu'elle atteint ce minimum en un point intérieur de cet intervalle donc en lequel sa dérivée s'annule. Or :

$$\frac{dD}{di} = 0 \Leftrightarrow\ cos(i)\cos(r') = \cos(r)\ cos(i')$$

$$\Leftrightarrow\ cos^2(i)\,cos^2(r') = cos^2(r)\ cos^2(i')$$

$$\Leftrightarrow\ \left(1 - sin^2(i)\right)\left(1 - sin^2(r')\right) = \left(1 - sin^2(r)\right)\left(1 - sin^2(i')\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \left(1 - sin^2(i)\right)\left(1 - \frac{1}{n^2}sin^2(i')\right) = \left(1 - \frac{1}{n^2}sin^2(i)\right)\left(1 - sin^2(i')\right)$$

$$\Leftrightarrow\ -sin^2(i) - \frac{1}{n^2}sin^2(i') = -sin^2(i') - \frac{1}{n^2}sin^2(i)$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{n^2}\right) sin^2(i') = \left(1-\frac{1}{n^2}\right) sin^2(i')$$

$$\Leftrightarrow i = i'$$

Ainsi la déviation est minimale lorsque $i = i'$ et elle vaut :

$$D_m = 2\,i - \hat{S}$$

Ainsi :

$$sin\left(\frac{D_m + \hat{S}}{2}\right) = sin(i)$$

De plus, à cette déviation minimale, on a :

$$r = r' = \frac{\hat{S}}{2}$$

Et :

$$sin(i) = n\,sin\left(\frac{\hat{S}}{2}\right)$$

On en déduit :

$$\boxed{n = \frac{sin\left(\frac{D_m + \hat{S}}{2}\right)}{sin\left(\frac{\hat{S}}{2}\right)}}$$

Si par un dispositif expérimental, on mesure cette déviation minimale, on peut alors en déduire par cette formule une mesure de l'indice de réfraction pour la longueur d'onde employée.