Potentiel électrostatique- Tension

Dans le cas de la force gravitationnelle, le concept d'énergie potentielle était apparu fort utile pour simplifier le traitement de nombreux problèmes de mécanique ne demandant pas de connaître explicitement la trajectoire, mais seulement son point initial et son point final.

Nous allons donc de la même façon, nous intéresser au travail de la force électrostatique créée par une distribution fixe de charges dans l'espace, sur une charge unité se déplaçant d'un point A à un point B.

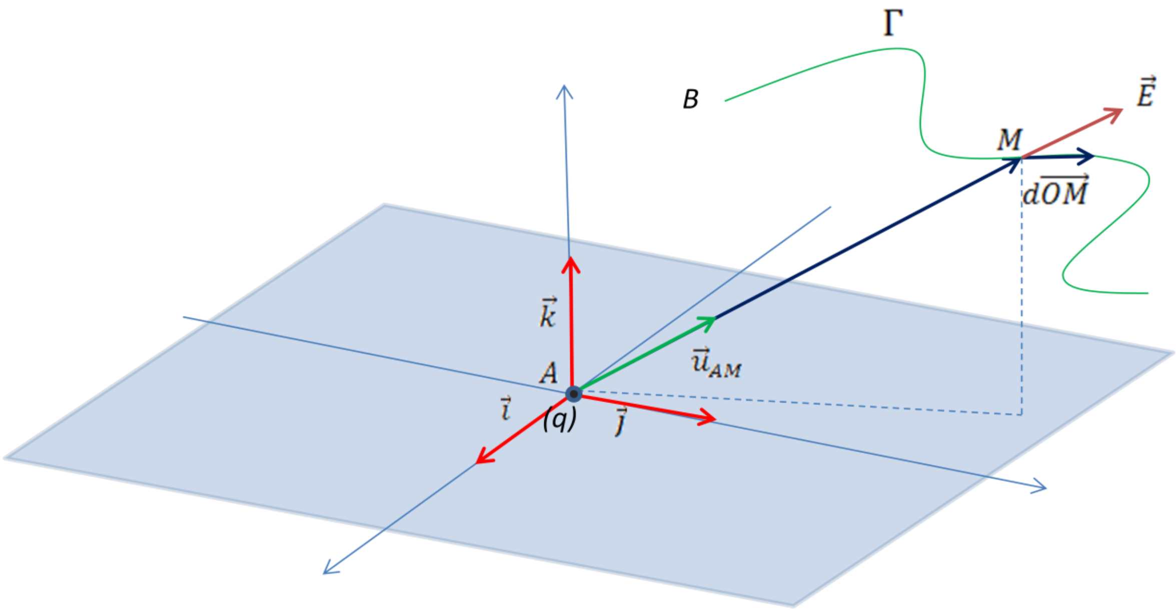
Comme toujours, nous procéderons graduellement, en commençant par une distribution réduite à une charge ponctuelle, puis nous généraliserons à N charges ponctuelles.

1) <u>Potentiel électrostatique associé à une charge ponctuelle</u>

Soit une charge q placée en un point A de l'espace. Cette charge crée un champ électrique en point M défini par :

$$\vec{E} = k\frac{q}{AM^2}\vec{u}_{AM} = k\frac{q}{AM^3}\overrightarrow{AM}$$

Evaluons alors le travail de ce champ électrique sur une charge unité (1 Coulomb) qui se déplacerait d'un point B à un point C, en empruntant un chemin Γ. Pour cela, considérons un repère orthonormé $\left(A\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath},\vec{k}\right)$



Notons (x, y, z) le triplet de coordonnées d'un point courant M du chemin. Nous avons alors :

$$AM^3 = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\overrightarrow{AM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$

Donc :

$$\boxed{\vec{E} = k\,q\left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{\imath} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{\jmath} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{k}\right)}$$

Considérons maintenant une portion élémentaire de chemin :

$$d\overrightarrow{AM} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$$

Le travail élémentaire du champ électrique sur la charge unité, sur cette portion élémentaire, est :

$$\boxed{\delta W = \vec{E}\cdot d\overrightarrow{AM} = k\,q\left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dz\right)}$$

Cherchons alors une fonction $V(M) = V(x\,;y\,;z)$ telle que l'expression ci-dessus en soit l'opposée de la différentielle, c'est-à-dire vérifiant pour tous $(x\,;y\,;z) \neq (0\,;0\,;0)$:

$$\delta W(x\,;y\,;z) = -\,dV(x\,;y\,;z)$$

Nous aurons alors, pour le travail du champ électrique de B à C, en prenant un paramétrage quelconque du chemin (le temps est approprié en physique) :

$$W_{B\to C\,(\Gamma)}(\vec{E}) = \int_{B\to C\,(\Gamma)} \delta W(x(t)\,;y(t)\,;z(t)) = \int_{B\to C\,(\Gamma)} -\,dV(x(t)\,;y(t)\,;z(t)) = V(B) - V(C)$$

Autrement dit, si nous trouvons une telle fonction, le travail du champ électrique ne dépendra pas du chemin suivi entre B et C, mais sera l'opposé de la variation d'une fonction de la position.

Reste à montrer qu'une telle fonction V existe. Il nous faut pour cela la trouver telle que pour tous points $(x\,,y\,,z) \neq (0\,,0\,,0)$, on ait :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -k\,q \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -k\,q\,x\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = -k\,q \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -k\,q\,y\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -k\,q \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -k\,q\,z\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Faisons, dans la première équation, le changement de variable

$$u = x^2+y^2+z^2\ ;\ \ du = 2\,x\,dx$$

Il vient :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -k\,q\,\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}\,\frac{du}{dx}$$

Soit :

$$V(x\,,y\,,z) = \ k\,q\,u^{-\frac{1}{2}} + \ g(y\,,z)$$

où $g(y\,,z)$ est une fonction différentiable de y et de z.

soit :

$$V(x\,,y\,,z) = \ \frac{k\,q}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} + \ g(y\,,z)$$

Reportant dans la deuxième équation, il vient :

$$-k\,q\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial g}{\partial y} = -k\,q\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Soit :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Donc $g(y\,,z)$ est une fonction constante de z que noterons $h(z)$

Reportant finalement dans la troisième équation, il vient :

$$-k\,q\,\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{dh}{dz}=-k\,q\,\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Soit :

$$\frac{dh}{dz}=0$$

h est donc une fonction constante arbitraire que nous noterons c.

<u>En résumé</u> :

Le travail du champ électrique $\vec{E}$, créé par une charge ponctuelle q placée en un point A de l'espace, sur un chemin reliant un point B à un point C, ne dépend pas du chemin suivi mais est l'opposé de la variation d'une fonction de la position V appelée potentiel électrostatique.

Les relations entre champ et potentiel sont les suivantes :

$$\boldsymbol{\vec{E}(M)=k\frac{q}{AM^2}\vec{u}_{AM}=k\frac{q}{AM^3}\overrightarrow{AM}}$$

$$\boldsymbol{V(M)=k\frac{q}{AM}+c} \qquad (\boldsymbol{c\text{ étant une constante arbitraire}})$$

$$\boldsymbol{\int_{B\to C\,(\Gamma)}\vec{E}(M)\cdot\,d\overrightarrow{AM}=V(B)-V(C)}$$

2) Potentiel électrostatique associé à N charges ponctuelles

Soient N charges ponctuelles $(q_i)_{i=1 \text{ à } N}$ placées respectivement en N points $(A_i)_{i=1 \text{ à } N}$.

Le (vecteur) champ électrique créé par les charges q_i en un point M de l'espace est la somme vectorielle des champs créés par chaque particule en ce point, soit :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i\,(M)$$

avec :

$$\vec{E}_i = k\frac{q_i}{{d_i}^2}\vec{u}_{A_iM} \quad , \qquad d_i = A_iM$$

Or, à chacun de ces champs est associé un potentiel V_i de la forme :

$$V_i(M) = k\frac{q_i}{A_iM} + c_i$$

On en déduit, par linéarité du produit scalaire et de l'intégrale, le travail du champ électrique entre deux points B et C le long d'un chemin Γ , O étant un point quelconque, l'origine d'un repère orthonormé par exemple :

$$\int_{B\to C\ (\Gamma)} \vec{E}(M)\cdot\, d\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{N} \int_{B\to C\ (\Gamma)} \vec{E}_i(M)\cdot\, d\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{N}\big(V_i(B) - V_i(C)\big)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{N} V_i(B)\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} V_i(C)\right)$$

Autrement dit, là encore, le travail du champ électrique résultant ne dépend pas du chemin suivi, et le potentiel qui lui est associé est la somme des potentiels associés à chaque charge.

En résumé :

Une distribution quelconque de charges fixes dans l'espace créé un champ de vecteurs dit électrostatique.

Le vecteur champ électrique en un point de l'espace est le vecteur force auquel serait soumise une particule portant une charge de un coulomb et placée en ce point. Il est la

somme vectorielle des vecteurs champ électrique créés par chaque particule chargée de l'espace en ce point.

Le travail de ce champ électrique le long d'un chemin reliant deux points de l'espace est indépendant de ce chemin. Il est l'opposé de la variation d'une fonction de l'espace appelée potentiel électrostatique et définie à une constante pouvant être choisie arbitrairement.

Mathématiquement, cela s'exprime par les relations :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \quad avec \quad \vec{E}_i = k\frac{q_i}{{d_i}^2}\vec{u}_{A_iM}$$

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_i(M) \quad avec \quad V_i(M) = k\frac{q_i}{A_iM} + c_i \quad (c_i\ contsante\ arbitraire)$$

$$\int_{B\to C\ (\Gamma)} \vec{E}(M) \cdot d\overrightarrow{OM} = V(B) - V(C)$$

3) Interprétation du potentiel électrostatique et notion de tension.

Reprenons la description précédente de N particules fixes et chargées dans l'espace. Le potentiel électrostatique étant défini à une constante arbitraire près, nous pouvons choisir cette constante de telle sorte que ce potentiel soit nul en un point pris comme référence, que nous noterons P_{ref}. Il suffit d'écrire pour cela :

$$V(P_{ref}) = \left(\sum_{i=1}^{N} k\frac{q_i}{A_iP_{ref}}\right) + c = 0$$

ce qui définit la valeur de la constante arbitraire c comme étant :

$$c = -\sum_{i=1}^{N} k\frac{q_i}{A_iP_{ref}}$$

Nous avons alors, pour tout point B de l'espace, distinct d'un point où se trouve une charge **:**

$$V(B) = V(B) - V(P_{ref})$$

Soit :

$$\boxed{\boldsymbol{V(B)} = \int_{\boldsymbol{B \to P_{ref}\ (\Gamma)}} \boldsymbol{\vec{E}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}}}$$

Autrement dit :

La valeur du potentiel électrostatique en un point de l'espace, un point de référence de potentiel nul par convention étant fixé, correspond au travail du vecteur champ électrique le long d'un chemin quelconque, du point au point de référence.

Cela amène à la notion de tension entre deux points.

Etant donnés deux points A et B de l'espace, distincts des points où se situent les charges ponctuelles, la **tension** entre le point A et le point B est la **différence de potentiel** entre ces points, on la note :

$$\boxed{\boldsymbol{U_{AB} = V(A) - V(B)}}$$

Interprétons alors cette notion d'un point de vue physique :

$$U_{AB} = \int_{A \to P_{ref}\ (\Gamma)} \vec{E}(M) \cdot d\overrightarrow{OM} \quad - \int_{B \to P_{ref}\ (\Gamma')} \vec{E}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Or, il est aisé de constater que :

$$\int_{B \to P_{ref}\ (\Gamma')} \vec{E}(M) \cdot d\overrightarrow{OM} \quad = \quad - \int_{P_{ref} \to B\ (\Gamma')} \vec{E}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Ainsi :

$$U_{AB} = \int_{A \to P_{ref}\ (\Gamma)} \vec{E}(M) \cdot d\overrightarrow{OM} \quad + \int_{P_{ref} \to B\ (\Gamma')} \vec{E}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Donc :

$$\boldsymbol{U_{AB}} = \int_{A \to B\ (\Gamma \cup \Gamma')} \vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}) \cdot\ \boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$$

La tension entre deux points A et B est donc le travail du champ électrique le long d'un chemin quelconque reliant ces deux points.

Il en découle :

Si une charge q se déplace dans l'espace d'un point A à un point B le long d'un chemin Γ, le travail de la force électrostatique qu'elle subit le long de ce chemin est :

$$\boldsymbol{W_{A \to B}} = \int_{A \to B\ (\Gamma)} \boldsymbol{q}\, \vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}) \cdot\ \boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{q}\, \boldsymbol{U_{AB}}$$