Polynôme annulateur d'une matrice carrée

1) <u>**Polynôme d'une matrice-polynôme annulateur**</u>

Soit $P(X) = a_p\, X^p + \cdots + a_1\, X + a_0$ un polynôme à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit alors la matrice carrée d'ordre n :

$$P(A) = a_p\, A^p + \cdots + a_1\, A + a_0\, I_n$$

où I_n désigne la matrice identité d'ordre n

On dit alors que $P(X)$ est un polynôme annulateur de A si $P(A)$ est la matrice nulle d'ordre n.

2) <u>**Propriété des polynômes annulateur d'une matrice**</u>

Si $\boldsymbol{P(X)}$ est un polynôme annulateur de $\boldsymbol{A}$ alors pour tout polynôme $\boldsymbol{Q(X)}$ le polynôme produit $\boldsymbol{R(X) = P(X)\, Q(X)}$ est également annulateur de $\boldsymbol{A}$

<u>Preuve</u> : Il suffit de noter que :

$$R(A) = P(A)\, Q(A)$$

Si $\boldsymbol{P(X)}$ est un polynôme annulateur de $\boldsymbol{A}$ alors toute valeur propre de $\boldsymbol{A}$ est racine de $\boldsymbol{P(X)}$, la réciproque étant fausse.

<u>Preuve</u> : Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre non nul associé, alors on a :

$$A\, V = \lambda\, V$$

Donc :

$$A^2\, V = A\, A\, V = A\, \lambda\, V = \lambda\, A\, V = \lambda^2\, V$$

Et par une récurrence évidente, pour tout entier naturel n :

$$A^n\, V = \lambda^n\, V$$

D’où :

$$P(A)V = \left(a_p\, A^p + \cdots + a_1\, A + a_0\, I_n\right) V$$

$$= a_p\, A^p V + \cdots + a_1\, A\, V + a_0\, V$$

$$= a_p\, \lambda^p\, V + \cdots + a_1\, \lambda\, V + a_0\, V$$

$$= \left(a_p\, \lambda^p\; + \cdots + a_1\, \lambda\; + a_0\right) V$$

$$= P(\lambda)\, V$$

Ainsi si $P(A) = 0$ alors $P(A)V = 0$ donc $P(\lambda)\, V = 0$ d’où $P(\lambda) = 0$ car $V \neq 0$

La réciproque est évidemment fausse car si $P(X)$ est annulateur de A en prenant λ qui ne soit pas une valeur propre de A, le polynôme $P(X)\,(X - \lambda)$ est également annulateur de A et admet λ pour racine.

3) <u>**Théorème de Cayley Hamilton**</u>

Le polynôme caractéristique d’une matrice carrée A d’ordre n est un polynôme annulateur de cette matrice.

<u>Preuve</u> :

Soit $V \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})^*$ et soit p le plus petit entier naturel tel que $(V, A\,V, \ldots, A^p\, V)$ soit une partie liée. Alors $(V, A\,V, \ldots, A^{p-1}\, V)$ est une partie libre et :

$$\exists\ \left(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}\right) \in \mathbb{K}^n\colon\ A^p\, V = a_0\, V + a_1\, A\, V + \cdots + a_{p-1}\, A^{p-1}\, V$$

$(V, A\,V, \ldots, A^{p-1}\, V)$ peut alors être complétée par $m = n - p$ vecteurs colonnes $(W_1, W_2, \ldots, W_m)$ en une base de $\mathbb{K}^n$.

Désignons par P la matrice dont les vecteurs colonnes sont

$$(V, A\,V, \ldots, A^{p-1}\, V, W_1, W_2, \ldots, W_m)$$

Alors la matrice $A\, P$ est la matrice dont les vecteurs colonnes sont :

$$(A\,V, A^2\, V, \ldots, A^p\, V, A\, W_1, A\, W_2, \ldots, A\, W_m)$$

On a alors :

$$A\, P = P\, B$$

où B est la matrice est une matrice formée de 4 blocs :

$$B = \begin{pmatrix} C & D \\ O & E \end{pmatrix}$$

avec C matrice carrée d'ordre p définie par :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & a_0 \\ 1 & 0 & & & & & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ & 0 & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 & a_{p-2} \\ & & & & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

O matrice rectangulaire à m lignes et p colonnes, D matrice rectangulaire à p lignes et m colonnes formées par les coordonnées de $(A\,W_1, A\,W_2, \dots, A\,W_m)$ sur la base $(V, A\,V, \dots, A^{p-1}\,V, W_1, W_2, \dots, W_m)$ soit :

$$A\,W_j = \sum_{i=1}^{p} d_{ij}\,A^{i-1}\,V \; + \sum_{i=1}^{m} e_{ij}\,W_i$$

On a alors :

$$P^{-1} A\,P = B$$

A et B sont donc semblables et ont de ce fait même polynôme caractéristique. Ainsi, en procédant à un calcul par blocs :

$$P_A(X) = P_B(X) = P_C(X)\,P_E(X)$$

Or C étant une matrice compagnon (voir exercice sur déterminants)

$$P_C(X) = \begin{vmatrix} -X & & & & & & a_0 \\ 1 & -X & & & & & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ & 0 & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & -X & a_{p-2} \\ & & & & 0 & 1 & a_{p-1} - X \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^p \left(X^p - a_{p-1}\,X^{p-1} - \cdots - a_1\,X - a_0 \right)$$

Donc :

$$P_A(A)\,V = \; P_E(A)\,P_C(A)\,V = (-1)^p P_E(A)\left(A^p - a_{p-1}\,A^{p-1} - \cdots - a_1\,A - a_0\,I_n\right) V$$

$$= (-1)^p\,P_E(A)\left(A^p V - a_{p-1}\,A^{p-1} V - \cdots - a_1\,A\,V - a_0\,V\right)$$

$$= (-1)^p P_E(A)\ 0 = 0$$

On en déduit que $P_A(A)$ est la matrice nulle

3) **Polynôme minimal** :

Etant donné A une matrice carrée d'ordre n, parmi tous les polynômes non nuls annulateurs de A de plus bas degré, il en existe un unique de coefficient de plus haut degré (coefficient dominant) égal à 1. Ce polynôme, noté $m_A(X)$ est appelé polynôme minimal de A et est de degré inférieur ou égal à n. Tout polynôme annulateur de A est multiple de ce polynôme minimal, soit :

$$\forall\, \boldsymbol{P(X)} \in \mathbb{K}[\boldsymbol{X}] :$$

$$\boldsymbol{P(A) = 0 \ \Rightarrow\ \exists\, Q(X) \in \mathbb{K}[X] :\ P(X) = Q(X)\, m_A(X)}$$

Preuve :

Considérons l'ensemble $\mathbb{E}$ formé par les polynômes annulateurs non nuls de A et le sous ensemble d'entiers naturels :

$$I = \{d^o(P(X)) : P(X) \in \mathbb{E}\}$$

I étant non vide, il possède un plus petit élément n_0. Soit alors $m_1(X)$ un polynôme de $\mathbb{E}$ de coefficient dominant égal à 1 et tel que :

$$d^o\big(m_1(X)\big) = n_0$$

Soit alors un polynôme quelconque de $\mathbb{E}$. La division euclidienne assure qu'il existe un unique couple de polynômes $(Q(X), R(X))$ tel que :

$$P(X) = m_1(X)\ Q(X) + R(X)$$

avec :

$$d^o(R(X)) < d^o\big(m_1(X)\big)$$

alors :

$$R(X) = P(X) - m_1(X)\ Q(X)$$

et :

$$R(A) = P(A) - m_1(A)\ Q(A) = 0$$

Donc $R(X)$ est un polynôme annulateur de A. Mais il ne peut pas être dans $\mathbb{E}$ car de degré strictement inférieur à $m_1(X)$. $R(X)$ est donc le polynôme nul. Ainsi :

$$P(X) = m_1(X)\, Q(X)$$

Soit alors un second polynôme $m_2(X)$ de mêmes caractéristiques que $m_1(X)$, c'est-à-dire annulateur de A de degré n_0 et de coefficient dominant égal à 1. Alors :

$$\exists\, Q(X) \in \mathbb{K}[X] \;:\; m_2(X) = m_1(X)\, Q(X)$$

Ainsi :

$$d^o\big(m_2(X)\big) = d^o\big(m_1(X)\big) + d^o\big(Q(X)\big)$$

Donc :

$$d^o\big(Q(X)\big) = 0$$

$Q(X)$ est donc une constante k et elle est non nulle car $m_2(X)$ n'est pas le polynôme nul. Ainsi :

$$coefdom\big(m_2(X)\big) = coefdom\big(m_1(X)\big) \times k$$

Donc :

$$k = 1$$

D'où :

$$m_2(X) = m_1(X)$$

4) <u>**Théorème des noyaux**</u> :

Etant donné A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, $\mathbb{E}_n$ l'espace vectoriel des matrices colonne d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $P(X)$ un polynôme annulateur de A de la forme :

$$\boldsymbol{P(X) = \prod_{i=1}^{p} P_i(X)}$$

où les polynômes $P_i(X)$ sont premiers entre eux deux à deux, alors :

$$\mathbb{E}_n = \boldsymbol{Ker(P_1(A)) \oplus Ker(P_2(A)) \oplus \ldots \oplus Ker\big(P_p(A)\big)}$$

<u>Preuve</u> :

Introduisons les p polynômes premiers entre eux dans leur ensemble :

$$Q_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{q} P_i(X)$$

D’après le théorème de Bezout, il existe une famille de q polynômes $\left(U_i(X)\right)_{i=1 \text{ à } q}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{q} U_i(X)\, Q_i(X) = 1$$

Ainsi, en désignant par I_n la matrice identité d’ordre n :

$$\sum_{i=1}^{q} U_i(A)\, Q_i(A) = I_n$$

Soit, pour tout vecteur-colonne W d’ordre n :

$$\sum_{i=1}^{q} (U_i(A)\, Q_i(A)\, W) = W$$

Posons pour tout $i \in [\![1, q]\!]$: $W_i = U_i(A)\, Q_i(A)\, W$. On a :

$$P_i(A)\, W_i = U_i(A)\, P_i(A)\, Q_i(A)\, W = U_i(A)\, P(A) W = U_i(A)\, 0_n = 0_n$$

Donc :

$$W_i \in Ker(P_i(A))$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}_n = Ker(P_1(A)) + Ker\big(P_2(A)\big) + \cdots + Ker\big(P_q(A)\big)$$

Montrons alors que la somme est directe :

On a pour tout $i \in [\![1, q]\!]$: $P_i(X)$ et $Q_i(X)$ sont premiers entre eux. D’après le théorème de Bezout, il existe un couple de polynômes $\big(R_i(X), S_i(X)\big)$ tels que :

$$R_i(X)\, P_i(X) + S_i(X)\, Q_i(X) = I_n$$

Soit $W \in Ker(P_i(A)) \cap \sum_{k=1, k \neq q}^{q} Ker(P_k(A))$ alors :

$$P_i(A)\, W = 0_n$$

Et il existe une famille $(W_k)_{k=1 \text{ à } q, k \neq i}$ telle que :

$$W=\sum_{k=1,k\neq i}^{q} W_k,\quad W_k\in Ker(P_k(A))$$

De plus :

$$R_i(A)\,P_i(A)\,W\ +S_i(A)\,Q_i(A)W=W$$

Or :

$$Q_i(A)\,W=\sum_{k=1,k\neq i}^{q} Q_i(A)\,W_k$$

Et :

$$Q_i(A)\,W_k=\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{q} P_j(A)\right)W_k=\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i,j\neq k}}^{q} P_j(A)\right)P_k(A)\,W_k=\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i,j\neq k}}^{q} P_j(A)\right)0_n=0_n$$

Ainsi :

$$Q_i(A)\,W=0_n$$

Et :

$$W=0_n$$

La somme est donc directe.

<u>5 Une application du théorème des noyaux</u> :

Deux résultats peuvent être facilement retrouvés concernant les matrices involutives et les matrices idempotentes.

Rappelons qu'une matrice involutive A d'ordre n est une matrice telle que : $A^2=I_n$

Le polynôme : $P(X)=X^2-1=(X-1)(X+1)$ est donc annulateur de cette matrice et les polynômes $X-1$ et $X+1$ sont premiers entre eux. Le théorème des noyaux donne alors :

$$\mathbb{E}_n=\boldsymbol{Ker(A-I_n)\oplus Ker(A+I_n)}$$

ce qui fait apparaitre A comme étant la matrice de la symétrie par rapport à $Ker(A-I_n)$ parallèlement à $Ker(A+I_n)$

Rappelons qu'une matrice idempotente A d'ordre n est une matrice telle que : $A^2 = A$

Le polynôme : $P(X) = X^2 - X = X\ (X-1)$ est donc annulateur de cette matrice et les polynômes X et $X-1$ sont premiers entre eux. Le théorème des noyaux donne alors :

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{Ker}(\boldsymbol{A}) \oplus \boldsymbol{Ker}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I_n})$$

ce qui fait apparaitre $\boldsymbol{A}$ comme étant la matrice de la projection sur $\boldsymbol{Ker}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I_n})$ parallèlement à $\boldsymbol{Ker}(\boldsymbol{A})$