Pick up de guitare - Filtre passe – bas résonnant

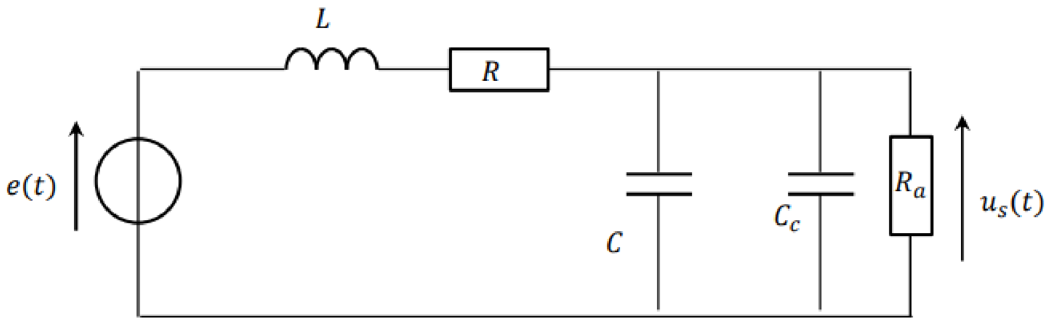
I Qu'est ce qu'un pick up ?

Un pick up de guitare est un système électronique qui convertit le signal acoustique produit par la vibration mécanique d'une corde en signal électrique, lequel est ensuite transmis via un câble muni de prises jack à un amplificateur, qui le transmet à la bobine d'un haut-parleur, lequel le convertit en signal acoustique.

L'avantage d'un tel système, outre d'amplifier le son produit par la corde de guitare, est de pouvoir en modifier le timbre, en réajustant la hauteur de certaines fréquences et en filtrant des hautes fréquences.

II Schéma électronique d'un pick up branché à un amplificateur

Les micros du pick up, qui captent le signal acoustique de la corde, produisent une tension $e(t)$ qui est transformée par le dispositif électronique du pick up en une tension de sortie $u_S(t)$ laquelle est transmise par le câble à l'amplificateur représenté sur le schéma par un résistor de résistance R_a.. Le pick-up est l'association d'un bloc formé par les micros produisant la tension $e(t)$ mis en série avec une bobine d'inductance L, un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C monté en dérivation. Le câble coaxial est représenté par un condensateur de capacité C_c branché en dérivation avec l'amplificateur.



Voici un exemple de valeurs :

$$R_a = 10^3\,R, \qquad R = 6\,k\Omega, \qquad C_c = 470\,pF, \qquad C = 100\,pF, \qquad L = 5{,}0\,H$$

R_a peut être modifiée à l'aide d'un potentiomètre intégré dans l'amplificateur.

III Fonction de transfert d'un pick up

On adoptera dans ce qui suit, pour la convention suivante : si $g(t)$ est une fonction du temps appelée signal de la forme :

$$g(t) = G\, cos(\omega\, t + \varphi)$$

La grandeur complexe associée, fonction complexe dépendant de la fréquence, est :

$$\underline{G} = G\, e^{i\,\varphi}$$

où G est l'amplitude du signal et φ sa phase à l'origine.

Les deux condensateurs et la résistance R_a étant montés en dérivation, ils sont équivalents à un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$ telle que :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{\frac{1}{j\,C\,\omega}} + \frac{1}{\frac{1}{j\,C_c\,\omega}} = \frac{1}{R_a} + j\,(C + C_c)\,\omega$$

Soit :

$$\underline{Z} = \frac{R_a}{1 + j\,R_a\,(C + C_c)\,\omega}$$

La bobine et la résistance R sont équivalents à un dipôle d'impédance complexe :

$$\underline{Z'} = R + j\,L\,\omega$$

L'impédance équivalente du dipôle soumis à la tension d'entrée est donc :

$$\underline{Z_{eq}} = \underline{Z} + \underline{Z'}$$

Les impédances $\underline{Z}$ et $\underline{Z'}$ constituant un pont diviseur de tension, on a :

$$\underline{U_s} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z'}}\,\underline{E}$$

La fonction de transfert du pick up est donc :

$$\underline{H} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z'}} = \frac{R_a}{1 + j\,R_a\,(C + C_c)\,\omega}\,\frac{1}{\frac{R_a}{1 + j\,R_a\,(C + C_c)\,\omega} + R + j\,L\,\omega}$$

$$= \frac{R_a}{R_a + (1 + j\,R_a\,(C + C_c)\,\omega)\,(R + j\,L\,\omega)}$$

$$= \frac{R_a}{R_a + R + j\,\big(L + R\,R_a\,(C + C_c)\big)\,\omega - R_a\,L\,(C + C_c)\,\omega^2}$$

$$\underline{H} = \frac{\frac{R_a}{R_a + R}}{1 + j\ \frac{\left(L + R\ R_a\ (C + C_c)\right)}{R_a + R}\ \omega - \frac{R_a\ L\ (C + C_c)}{R_a + R}\ \omega^2}$$

Soit en posant :

$$H_0 = \frac{R_a}{R_a + R} \approx 1, \omega_0 = \sqrt{\frac{R_a + R}{R_a\ L\ (C + C_c)}} \approx \frac{1}{\sqrt{L\ (C + C_c)}},$$

$$Q\ \omega_0 = \frac{R_a + R}{L + R\ R_a\ (C + C_c)} \approx \frac{R_a}{L + R\ R_a\ (C + C_c)} = \frac{1}{\frac{L}{R_a} + R(C + C_c)}$$

Et en utilisant la fréquence :

$$f = \frac{\omega}{2\,\pi}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\ \frac{1}{Q}\ \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 + j\ \frac{1}{Q}\ \frac{f}{f_0} - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

<u>IV Analyse du gain de la fonction de transfert</u>

Le gain associé à la fonction de transfert est :

$$G = 20\ log\left(\left|\underline{H}\right|\right) = -20\ log\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}\right)$$

$$G = -10\ log\left(\left(1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)$$

Pour simplifier l'analyse, posons :

$$x = \left(\frac{f}{f_0}\right)^2, y = \frac{f}{f_0}$$

$$g(x) = (1 - x)^2 + \frac{1}{Q^2}x$$

Alors :

$$\boxed{G = -10\ log\big(g(x)\big)}$$

Etudions alors les fonctions g et h sur $\mathbb{R}$.

$$g(x) = x^2 - \left(2 - \frac{1}{Q^2}\right)\ x + 1$$

g est donc de la forme :

$$g(x) = a\ x^2 + b\ x + c$$

où $a = 1$.

g peut donc se mettre sous une forme canonique :

$$g(x) = a\ (x - x_0)^2 + y_0$$

où (x_0, y_0) est le couple de coordonnées du sommet de la portion de parabole définie par le graphe $y = g(x)$ dans un repère orthonormé et :

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2\ a} = 1 - \frac{1}{2\ Q^2}}$$

y_0 est la valeur minimum de g et vaut :

$$y_0 = g(x_0) = \left(1 - \frac{1}{2\ Q^2}\right)^2 - \left(2 - \frac{1}{Q^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2\ Q^2}\right) + 1$$

$$= 1 - \frac{1}{Q^2} + \frac{1}{4\ Q^4} - 2 + \frac{1}{Q^2} + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2\ Q^4} + 1$$

Soit :

$$\boxed{y_0 = \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4\ Q^4}}$$

Deux cas sont donc à envisager pour g selon que $x_0 > 0$ ou $x_0 \leq 0$. Or :

$$x_0 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2\ Q^2} \leq 0 \Leftrightarrow Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1$^{\text{er}}$ cas : $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc par composée, $G(f)$ est strictement décroissante.

La fonction de transfert est alors celle d'un filtre passe bas de fréquence de coupure à $-3\ dB$ définie par :

$$G(f) = G(0) - 3$$

$$-10\ log\left(x^2 - \left(2 - \frac{1}{Q^2}\right)\ x + 1\right) = -3$$

$$x^2 - \left(2 - \frac{1}{Q^2}\right) x + 1 = 10^{0,3}$$

$$x^2 - \left(2 - \frac{1}{Q^2}\right) x + 1 - 10^{0,3} = 0$$

$$\Delta = \left(2 - \frac{1}{Q^2}\right)^2 - 4\,(1 - 10^{0,3}) = \frac{1}{Q^4} - \frac{4}{Q^2} + 4 \times 10^{0,3} > 0$$

Sachant que :

$$10^{0,3} - 1 \approx 0{,}995 \approx 1{,}00$$

Donc :

$$\Delta \approx \frac{1}{Q^4} - \frac{4}{Q^2} + 8$$

On ne retient que la solution positive :

$$x = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{Q^2} + \sqrt{\frac{1}{Q^4} - \frac{4}{Q^2} + 8}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(2 - \frac{1}{Q^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{Q^4} - \frac{4}{Q^2} + 8\right)}{2 - \frac{1}{Q^2} - \sqrt{\frac{1}{Q^4} - \frac{4}{Q^2} + 8}}\right)$$

$$= -2\left(\frac{1}{2 - \frac{1}{Q^2} - \sqrt{\left(2 - \frac{1}{Q^2}\right)^2 + 8}}\right) = \frac{2}{\frac{1}{Q^2} - 2 + \sqrt{\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)^2 + 8}}$$

Quand Q vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$x = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et la fréquence de coupure est :

$$\boxed{f = \frac{f_0}{2^{\frac{1}{4}}} = \approx 1{,}2\, f_0}$$

Quand Q tend vers 0 :

$$x \approx Q^2$$

et la fréquence de coupure est :

$$\boxed{f \approx Q\, f_0 = \frac{2\,\pi}{\frac{L}{R_a} + R(C + C_c)}}$$

2ème cas : $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

g est strictement décroissante sur $\left[0{,}1-\frac{1}{2\,Q^2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[1-\frac{1}{2\,Q^2},+\infty\right[$ donc $G(f)$ est strictement croissante sur $[0, f_1\,]$ et strictement croissante sur $[f_1, +\infty[$ où :

$$\boxed{f_1 = f_0\,\sqrt{1-\frac{1}{2\,Q^2}}}$$

La valeur maximum de G est obtenue pour $f = f_1$ et vaut :

$$\boxed{G(f_1) = -10\,log\left(\frac{1}{Q^2}-\frac{1}{4\,Q^4}\right)}$$

Quand $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$G(f_1) = -10\,log\left(\frac{3}{4}\right) \approx 1{,}2\,dB$$

Quand Q devient grand devant 1 :

$$G(f_1) \approx 20\,log(Q)$$

Par exemple quand $Q = 10$, le gain maximum est de :

$$G(f_1) \approx 20\,dB$$

<u>Développements asymptotiques</u> :

Pour des fréquences basses, la fonction $G(f)$ vaut 0 en 0 et admet une tangente horizontale.

Pour des fréquences élevées, on faire les approximations :

$$\left(1-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)^2+\frac{1}{Q^2}\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 \approx \left(\frac{f}{f_0}\right)^4$$

Ainsi :

$$G \approx -40\,log(f)$$

Le diagramme de Bode, dans lequel G est représenté en fonction de $log(f)$ fait apparaitre une pente descendante de $40\,dB$ pour une augmentation d'une unité de $log(f)$ c'est-à-dire une multiplication de la fréquence par un facteur 10. On parle de pente de $-40\,dB$ par décade.

<u>V Analyse de la phase de la fonction de transfert</u>

La phase de la fonction de transfert est :

$$\varphi = arg(\underline{H}) = arg\left(1-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 - j\,\frac{1}{Q}\,\frac{f}{f_0}\right)$$

$$Tan(\varphi) = -\frac{\frac{1}{Q}\,\frac{f}{f_0}}{1-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

Posons :

$$x = \frac{f}{f_0}$$

Et introduisons la fonction :

$$h(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Pour $f < f_0$: $Cos(\varphi) < 0$ donc :

$$\varphi = Tan^{-1}\left(\frac{h(x)}{Q}\right) - \pi$$

Pour $f > f_0$: $Cos(\varphi) > 0$ donc :

$$\varphi = Tan^{-1}\left(\frac{h(x)}{Q}\right)$$

Or :

$$h(x) = \frac{1\,(x^2 - 1) - x\,(2\,x)}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

donc h décroit strictement sur $[0,1[$ et sur $]1, +\infty[$ et :

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} h(x) = +\infty$$

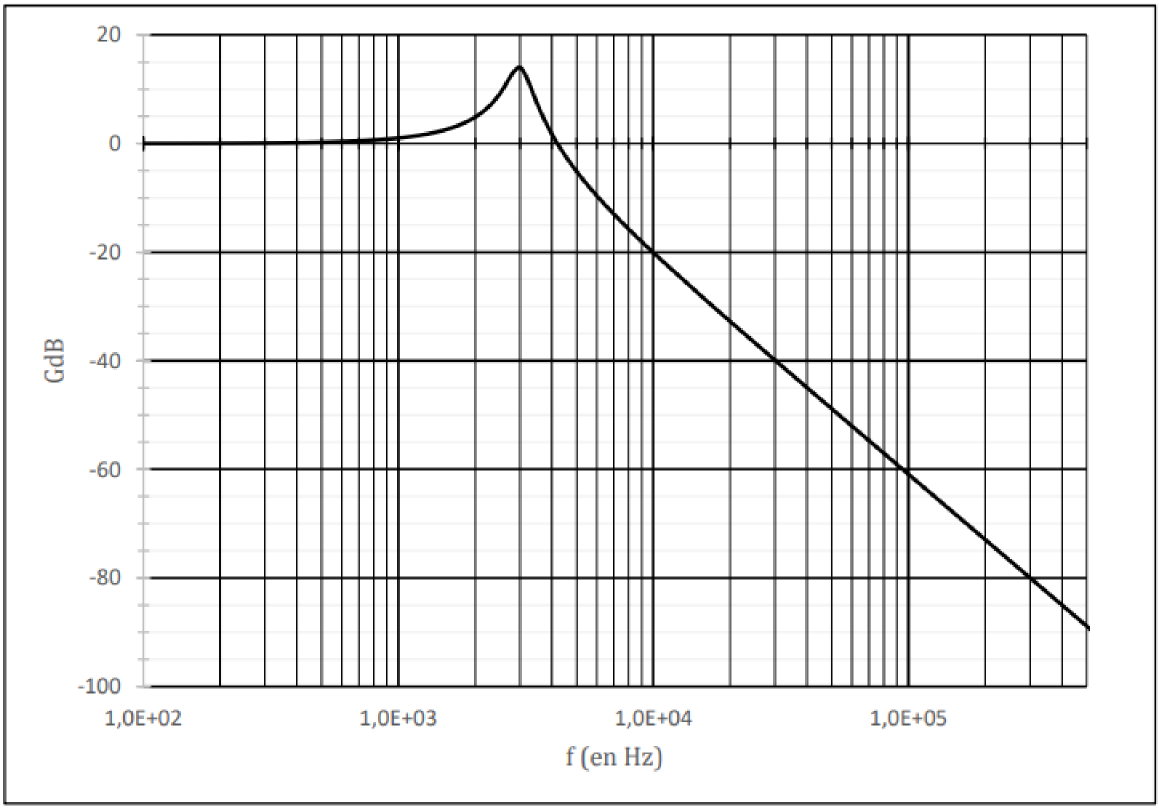
donc φ décroit strictement sur $[0, f_0[$ et sur $]f_0, +\infty[$ et :

$$\varphi(0) = 0, \qquad \lim_{f \to f_0{}_-} \varphi(f) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to f_0{}^+} \varphi(f) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \varphi(f) = 0$$

VI Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode donne le gain en fonction du logarithme décimal de la fréquence.

Voici le diagramme de Bode du système formé par le pick-up, le câble et l’amplificateur.



On peut lire sur ce diagramme la fréquence f_1 du pic et la valeur maximal du gain pour cette fréquence $G(f_1)$:

$$f_1 \approx 3000\ Hz$$

$$G(f_1) \approx 14\ dB$$

On peut donc en déduire la valeur du facteur de qualité en résolvant :

$$-10\ log\left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4\ Q^4}\right) = 14$$

$$\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4\ Q^4} = 10^{-1,4}$$

Posons :

$$x = \frac{1}{Q^2}$$

$$x - \frac{1}{4}\ x^2 = 10^{-1,4}$$

$$x^2 - 4\ x + 4 \times 10^{-1,4} = 0$$

Sachant qu'on ne retient que la solution $x < 2$ car le gain présente une résonance.

$$\Delta = 16 - 16 \times 10^{-1,4}$$

$$x_1 = \frac{4 - 4\sqrt{1 - 10^{-1,4}}}{2} = 2\ \left(1 - \sqrt{1 - 10^{-1,4}}\right) \approx 0,04 < 2$$

$$x_2 = 2\ \left(1 + \sqrt{1 - 10^{-1,4}}\right) > 2$$

Donc :

$$\frac{1}{Q^2} \approx 0,04$$

$$\boxed{Q \approx \frac{1}{0,02} = 5}$$

On peut alors en déduire la valeur de f_0 en résolvant :

$$f_1 = f_0\ \sqrt{1 - \frac{1}{2\ Q^2}}$$

Soit :

$$\boxed{f_0 = \frac{f_1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2\ Q^2}}} = \frac{3000}{\sqrt{0.98}} \approx 3030\ Hz}$$

Or :

$$2\ \pi\ f_0 = \frac{1}{\sqrt{L\ (C + C_c)}}$$

Donc :

$$L\ (C + C_c) = \frac{1}{4\ \pi\ {f_0}^2}$$

$$\boxed{C = \frac{1}{4\ \pi^2\ {f_0}^2\ L} - C_c = \frac{1}{4\ \pi^2 \times\ 3030^2\ \times 5} - C_c = 552 \times 10^{-12} - 470 \times 10^{-12} = 82\ pF}$$

De plus :

$$2\ \pi\ Q\ f_0 = \frac{1}{\frac{L}{R_a} + R(C + C_c)}$$

Donc :

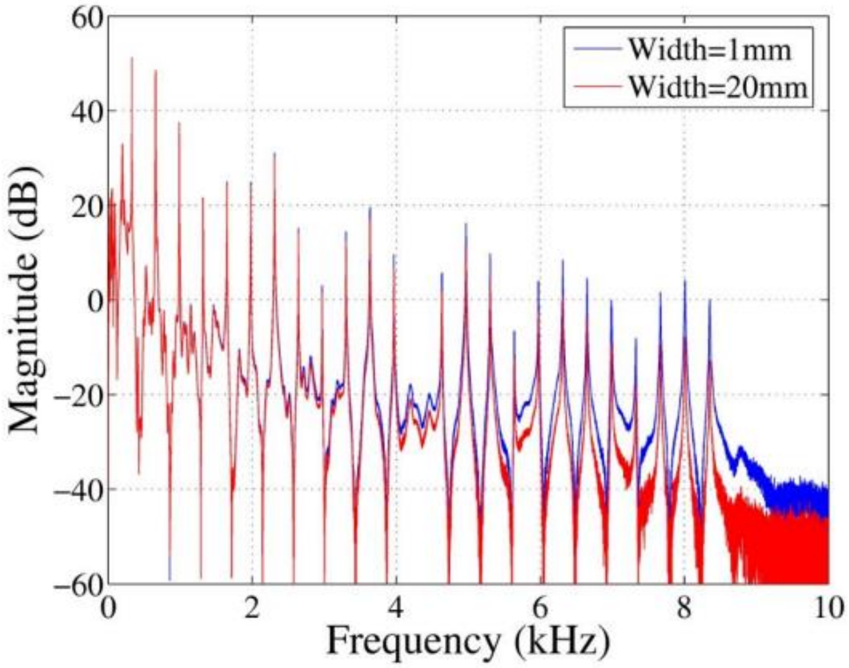
$$\frac{L}{R_a} + R(C + C_c) = \frac{1}{2\ \pi\ Q\ f_0}$$

$$\frac{5}{R_a} = \frac{1}{2\ \pi\ Q\ f_0} - R(C + C_c) = \frac{1}{2\ \pi\ \times 5 \times\ 3030} - 6 \times 10^3 \times 552 \times 10^{-12} = 7,2 \times 10^{-6}$$

$$R_a = 695\ k\Omega$$

VI Traitement par le pick-up du signal émis par une corde de guitare

On donne ci-dessous le spectre en amplitude (en décibels) du signal sonore émis par une corde de guitare.



L'amplitude en décibels est définie par la formule :

$$A_{dB} = 20\ log\left(\frac{A}{A_{ref}}\right)$$

Où A est l'amplitude de la tension du signal électrique transmis par le micro de l'analyseur de spectre et A_{ref} est une amplitude de référence égale à $10\ mV$.

On voit sur ce graphique une série de pics à intervalles réguliers, les sept premiers intervalles à compter de 0 totalisant une longueur de 3 kHz. On en déduit la fréquence fondamentale de ce signal :

$$f = \frac{3000}{7} \approx 430\ Hz$$

Et les fréquences des trois premiers harmoniques et du sixième et du neuvième harmonique

$$2\ f = 860\ Hz$$

$$3\ f = 1290\ Hz$$

$$4\ f = 1720\ Hz$$

$$7\ f = 3010\ Hz$$

$$10\ f = 4300\ Hz$$

On lit également sur le graphique les valeurs des amplitudes en décibels que l'on peut convertir en volt avec la formule :

$$A = A_{ref}\ 10^{\frac{A_{dB}}{20}}$$

Par exemple ,pour le fondamental , on lit sur le spectre, une amplitude de $50\ dB$ donc :

$$A = 0{,}01 \times\ 10^{\frac{50}{20}} = 3{,}2\ V$$

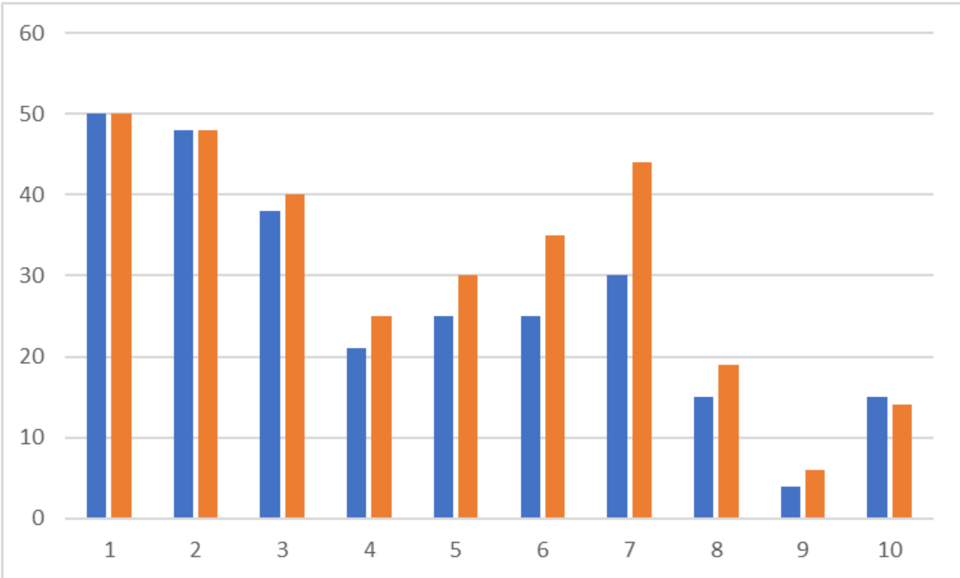
Voici un tableau des amplitudes jusqu'au troisième harmonique :

Fréquences (Hz)	f	$2\ f$	$3\ f$	$4\ f$	$7\ f$	$10\ f$
A_{dB}	50	48	38	21	30	15
$A\ (V)$	3,2	2,5	0,8	0,1	0,3	0,06

Après traitement par le pick-up, voici ce que deviennent les amplitudes en décibels :

Fréquences (Hz)	f	$2\ f$	$3\ f$	$4\ f$	$7\ f$	$10\ f$
Gain G_{dB}	0	0	2	4	14	-1
A_{dB}	50	48	40	25	44	14

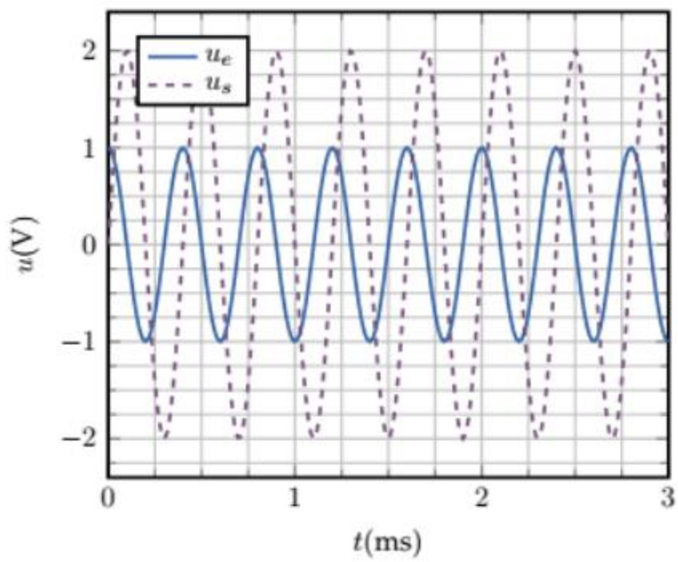
Voici l'allure du spectre (en bleu : avant traitement, en orange : après traitement)



L'effet du pick-up est donc de rehausser les composantes du spectre proches de 3000 Hz, modifiant ainsi le timbre du son pour le rendre plus brillant.

<u>VI Analyse de signaux d'entrée et de sortie</u>

On recueille les signaux de tension d'entrée et de sortie $u_e(t)$ et $u_s(t)$ d'un filtre de type pick-up



A partir de ces signaux, nous allons calculer la fréquence de ces signaux, le gain pour cette fréquence, la fonction de transfert de ce filtre pour la fréquence considérée. et obtenir ainsi le facteur de qualité et la fréquence f_0.

On voit sur la courbe de u_s que 5 périodes correspondent à 2 ms. Donc :

$$T = \frac{2}{5} = 0{,}4\, ms = 4 \times 10^{-4}\, s$$

Ainsi :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4 \times 10^{-4}} = 0{,}25 \times 10^{-4} = 2500\, Hz$$

Les tensions sont de la forme :

$$u_e = cos(\omega\, t)$$

$$u_s = 2\, cos(\omega\, t + \varphi)$$

Les grandeurs complexes associées sont donc :

$$\underline{U_e} = 1$$

$$\underline{U_s} = 2\, e^{i\,\varphi}$$

La fonction de transfert vaut alors pour cette fréquence :

$$\underline{H} = 2\, e^{i\,\varphi}$$

Le gain est donc :

$$G = 20\, log|\underline{H}| = 20\, log(2) = 6\, dB$$

et la phase φ s'obtient en lisant sur le graphique le retard τ de u_s sur u_e :

$$\tau = 0{,}125\, ms = 1{,}25 \times 10^{-3}\, s$$

On écrit ensuite :

$$u_s(t) = 2\, u_e(t - \tau) = 2\, cos(\omega\, t - \omega\, \tau)$$

Donc :

$$\varphi = -\omega\, \tau = -2\, \pi\, \frac{\tau}{T} = -2\, \pi\, \frac{1{,}25\ \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-4}} \approx -\frac{2\, \pi}{3}$$

Et la fonction de transfert est donc :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\, \frac{1}{Q}\, \frac{f}{f_0} - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} = 2\, e^{-i\, \frac{2\, \pi}{3}}$$

Donc :

$$1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + j\, \frac{1}{Q}\, \frac{f}{f_0} = \frac{1}{2}\, e^{i\, \frac{2\, \pi}{3}}$$

Soit :

$$\begin{cases} 1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\, cos\left(\frac{2\, \pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{Q}\, \frac{f}{f_0} = \frac{1}{2}\, sin\left(\frac{2\, \pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{f}{f_0} = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{Q}\, \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_0 = \frac{2\, f}{\sqrt{5}} = 2236\ Hz \\ Q = 2\, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = 2{,}6 \end{cases}$$