# *Construction d'un pentagone régulier*

Nous allons montrer comment construire un pentagone régulier à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas. Mais auparavant nous allons établir un résultat de trigonométrie en nous servant des nombres complexes.

## I Valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Rappelons pour cela l'identité, suivante, valable pour tout nombre complexe z ≠ 1 :

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{z^5 - 1}{z - 1}$$

qui s'écrit encore :

$$\boxed{z^5 - 1 = (z - 1)\,(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)}$$

et constitue, sous cette forme, une factorisation du polynôme $z^5 - 1$, valable pour tout nombre complexe z. Or nous avons :

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{5}}\right)^5 - 1 = 0$$

Donc le complexe z = $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{5}}$, qui est différent de 1, est racine du polynôme $z^5 - 1$, donc du polynôme $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$. Or pour z ≠ 0 :

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

$$= z^2\left(z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right)$$

$$= z^2\left(\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1\right)$$

$$= z^2 \left( \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 - 2 + \left( z + \frac{1}{z} \right) + 1 \right)$$

$$= z^2 \left( \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 + \left( z + \frac{1}{z} \right) - 1 \right)$$

Nous en déduisons que z $= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$ , qui n'est pas nul, annule l'expression :

$$\left( z + \frac{1}{z} \right)^2 + \left( z + \frac{1}{z} \right) - 1$$

D'où

$$\left( \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}} \right)^2 + \left( \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}} \right) - 1 = 0$$

Soit :

$$\left( \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} \right)^2 + \left( \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} \right) - 1 = 0$$

D'où :

$$\left( 2 \cos\left( \frac{2\pi}{5} \right) \right)^2 + 2 \cos\left( \frac{2\pi}{5} \right) - 1 = 0$$

$$\boxed{4 \left( \cos\left( \frac{2\pi}{5} \right) \right)^2 + 2 \cos\left( \frac{2\pi}{5} \right) - 1 = 0}$$

$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est donc une racine du polynôme du second degré :

$$\boxed{\mathrm{P(x)} = 4\,\mathrm{x}^2 + 2\,\mathrm{x} - 1}$$

Le discriminant de ce polynôme est :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 20$$

Le polynôme a donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{20}}{8} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

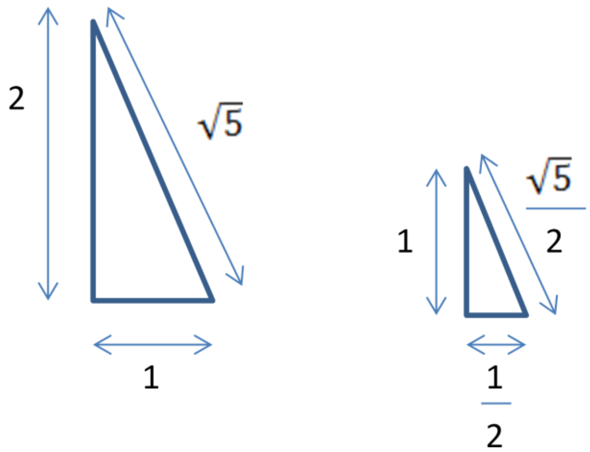
$$x_2 = \frac{-2+\sqrt{20}}{8} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Or la première racine est strictement négative et la seconde, strictement positive. Puisque $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$, nous en déduisons :

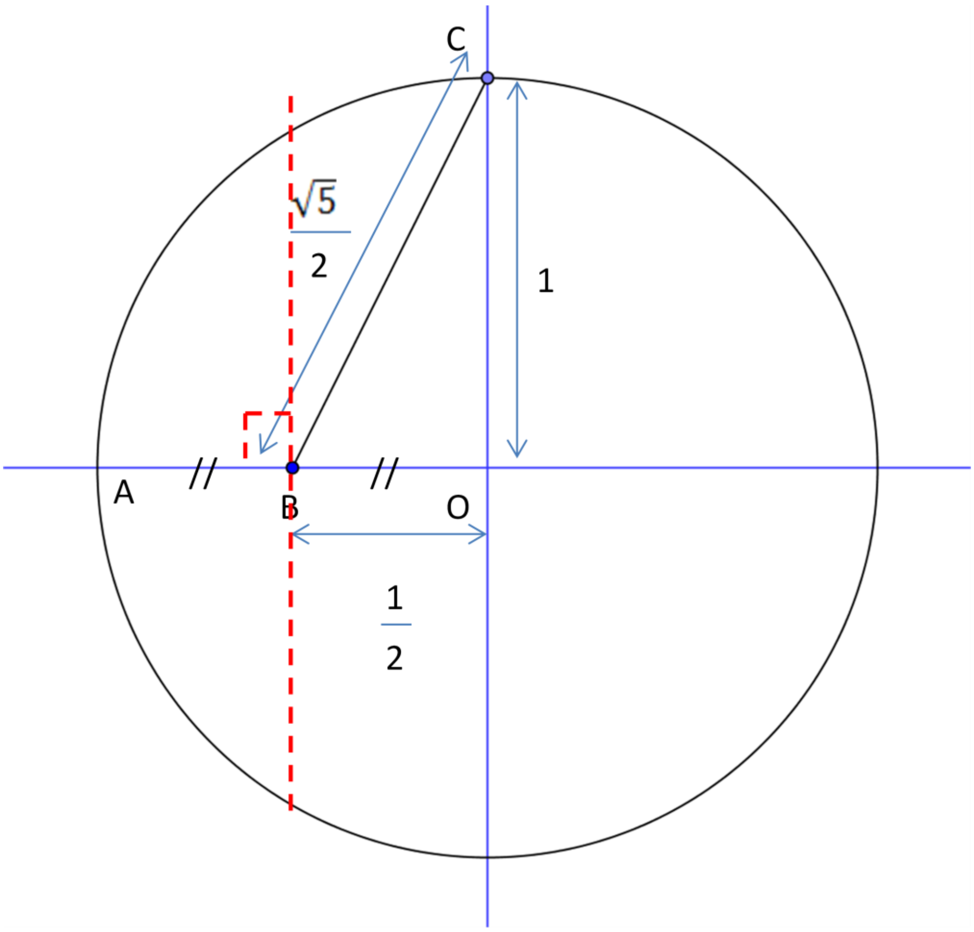
$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

## II Construction d'un pentagone régulier

La construction est très simple, il s'agit de « faire apparaître $\sqrt{5}$ » par une construction à la règle et au compas utilisant le théorème de Pythagore. En voici deux exemples :




Nous allons alors grâce à cela, inscrire un pentagone régulier dans un cercle, dont le rayon sera pris comme unité.



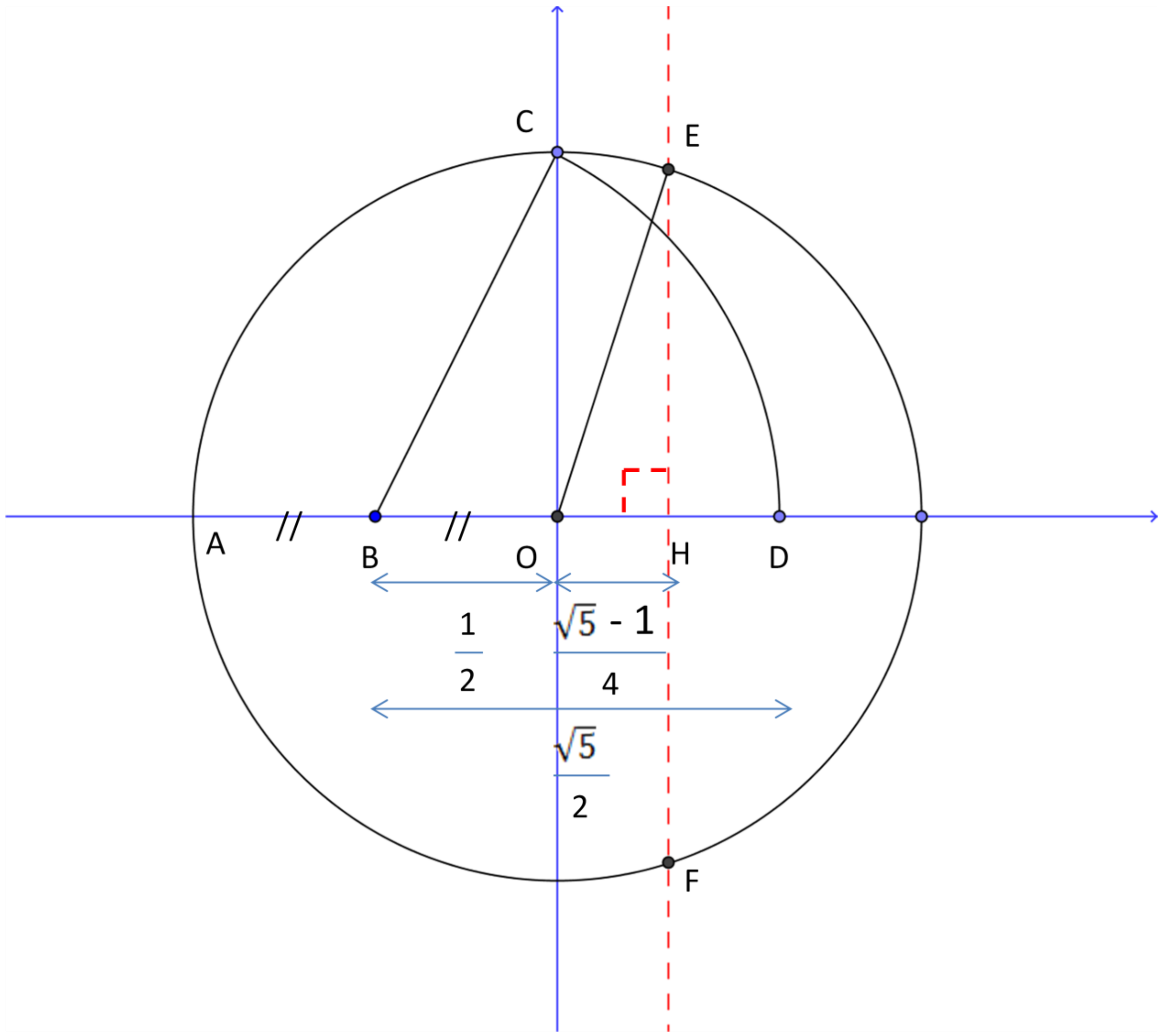

A la règle et au compas, nous traçons donc deux droites perpendiculaires (O A) et (O  C) passant par le centre O d'un cercle.

Nous traçons alors la médiatrice de [O ; A] pour pouvoir porter le milieu B de ce segment.

Le cercle de centre B passant par C a alors pour rayon :

$$\boxed{B\,C = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Ce cercle coupe la droite (O A) en un point D.




Soit H le milieu de [O ; D], alors on a :

$$\mathrm{OD} = \mathrm{B\,D} - \mathrm{B\,O} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

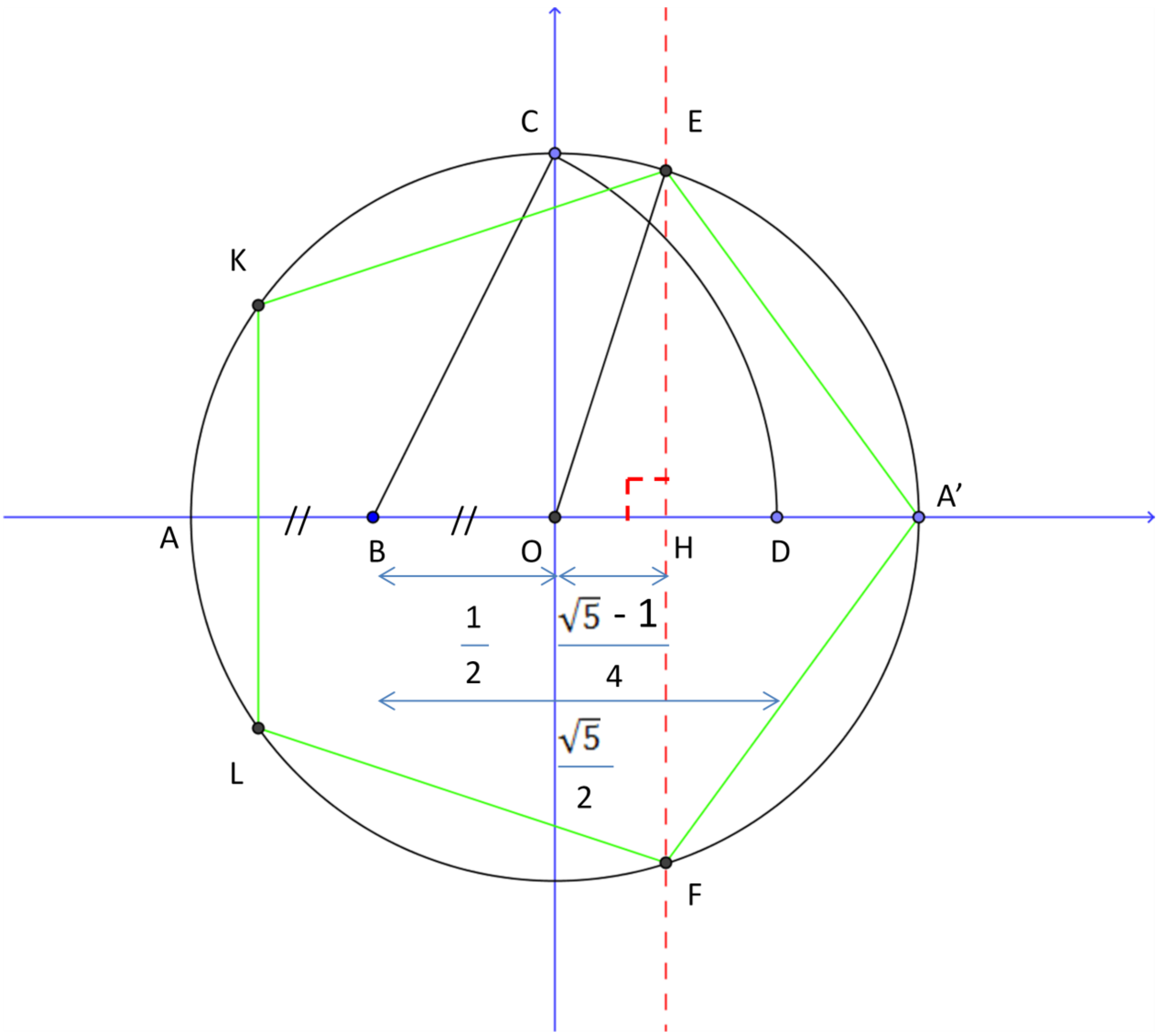
On en déduit :

$$\mathrm{OH} = \frac{1}{2}\mathrm{OD} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Soit alors la médiatrice du segment [O ; D]. Elle coupe le cercle en deux points E et F. La mesure des angles $\widehat{\mathrm{DOE}}$ et $\widehat{\mathrm{DOF}}$ en radians est alors :

$$\widehat{DOE} = \widehat{DOF} = \frac{2\pi}{5}$$

En notant A’ le point diamétralement opposé à A, les segments [F ; A’] et [A’ ; E] forment donc les deux côtés adjacents d’un pentagone régulier que nous pouvons achever de construire au compas avec le cercle de centre E et de rayon E A’ et le cercle de centre F et de rayon F A’ pour porter respectivement les points K et L.




Et voilà ....

Comment les nombres complexes passent pour être une des merveilles des mathématiques.

De simples propriétés algébriques conduisent à des révélations géométriques.

On pourrait certes obtenir ce résultat par d'autres voies, sinon comment nos ancêtres antiques auraient ils excellé dans la géométrie.

J'attends vos propositions, chers lecteurs (lectrices ) !