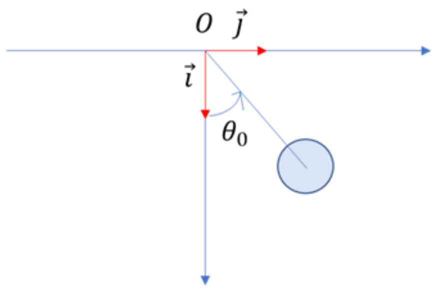
Période d'oscillation d'un pendule

On considère un pendule formé d'une tige de masse négligeable reliée à un support fixe dans le référentiel terrestre et à l'extrémité de laquelle se trouve fixée une boule de masse m. L'ensemble formé par la tige et la boule, appelé pendule, peut pivoter librement autour d'un axe situé dans un plan horizontal $(O, \overrightarrow{k})$.

1) Paramètres de description du problème

Le référentiel terrestre est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ tel que défini par la figure ci-dessous et le mouvement du centre de gravité M de la boule se fait dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orienté par la base de ce repère.

La position initiale du pendule est définie par l'angle $\theta_0 = \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_0}\right)$ et le rayon OM de la trajectoire est noté r.



On note pour une position courante $\theta = \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ et $\vec{u}(\theta)$ le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ et de même sens donc :

$$\vec{u}(\theta) = cos(\theta)\,\vec{\imath} + sin(\theta)\,\vec{\jmath}$$

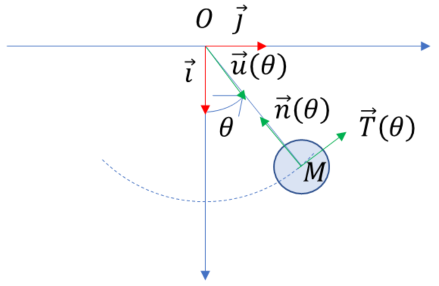
On note également $\vec{T}(\theta)$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{u}(\theta)$ c'est-à-dire tel que

$$\left(\vec{u}(\theta), \vec{T}(\theta)\right) = 90°$$

et $\vec{n}(\theta)$ le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{T}(\theta)$ pointant vers O. Ainsi :

$$\vec{T}(\theta) = -sin(\theta)\,\vec{\imath} + cos(\theta)\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{n}(\theta) = -\vec{u}(\theta) = -cos(\theta)\,\vec{\imath} - sin(\theta)\,\vec{\jmath}$$



L'objet de l'étude est de déterminer le mouvement du point M en lâchant la boule depuis sa position initiale.

2) Description cinématique :

a) Description de la position de M

Le mouvement de M est à un seul degré de liberté qui peut être pris comme étant l'angle θ. Le vecteur position se décrit donc ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{x}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} = \boldsymbol{r}\,\vec{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\theta})\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\theta})\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}}$$

b) Description du vecteur vitesse de M

Les dérivées temporelles seront, par souci de simplification d'écriture, notées avec un point au-dessus de la variable à dériver. Ainsi, par exemple :

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

On rappelle également le principe de la dérivée d'une composée :

$$\frac{dcos(\theta)}{dt} = \frac{dcos(\theta)}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\big(-sin(\theta)\big) = -\dot{\theta}\,sin(\theta)$$

Le vecteur vitesse d'en déduit par dérivation temporelle du vecteur position :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = r\,\frac{dcos(\theta)}{dt}\,\vec{\imath} + r\,\frac{dsin(\theta)}{dt}\,\vec{\jmath} = -r\,\dot{\theta}\,sin(\theta)\,\vec{\imath} + r\,\dot{\theta}\,cos(\theta)\,\vec{\jmath}$$

Donc :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{r}\,\dot{\boldsymbol{\theta}}\;\vec{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{\theta})}$$

On voit sur cette description que lorsque le mouvement se fait dans le sens trigonométrique, c'est-à-dire $\dot{\theta} > 0$, $\vec{v}$ et $\vec{T}(\theta)$ sont colinéaires et de même sens et le repère $\big(M, \vec{T}(\theta), \vec{n}(\theta)\big)$ n'est autre que le repère de Frénet, mais lorsque le mouvement se fait dans le sens horaire, ce n'est plus le cas. Voilà pourquoi dans un souci de description unique, nous préférons travailler dans le repère $\big(M, \vec{T}(\theta), \vec{n}(\theta)\big)$ plutôt que dans le repère de Frénet comme cela se fait habituellement pour les mouvements à un seul degré de liberté.

c) Description du vecteur accélération de M

Le vecteur accélération s'en déduit par dérivation temporelle du vecteur vitesse, ainsi :

$$\vec{a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -r\,\Big(\ddot{\theta}\,sin(\theta) + \dot{\theta}\,\dot{\theta}\,cos(\theta)\Big)\,\vec{\imath} + r\,\Big(\ddot{\theta}\,cos(\theta) + \dot{\theta}\,\dot{\theta}\big(-sin(\theta)\big)\Big)\,\vec{\jmath}$$

$$= r\,\ddot{\theta}\,(-sin(\theta)\,\vec{\imath} + cos(\theta)\,\vec{\jmath})\; + r\,\dot{\theta}^2\,(-cos(\theta)\,\vec{\imath} - sin(\theta)\,\vec{\jmath})$$

Soit :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{r}\,\ddot{\boldsymbol{\theta}}\;\vec{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{r}\,\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{2}}\,\vec{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\theta})}$$

On reconnait la décomposition en vecteur accélération tangentielle (premier terme) et vecteur accélération normale (second terme)

3) Etude des oscillations libres non amorties :

a) système étudié

Le système mécanique étudié est la boule (donc sans la tige)

b) référentiel d'étude

Le référentiel adapté est le référentiel terrestre qui peut être considéré comme un référentiel galiléen.

c) Forces extérieures

La résistance de l'air et la poussée d'Archimède peuvent être négligées devant le poids de la boule pour cette expérience (ce ne serait pas le cas si la boule se déplaçait dans de l'eau)

La boule est soumise à son poids terrestre :

$$\vec{P} = m\,\vec{g} = m\,g\,\vec{\imath}$$

où, la valeur de g à Paris vaut 9,81 $m\,s^{-2}$

et à la force exercée par la tige :

$$\vec{F} = F\,\vec{n}(\theta)$$

d) Seconde loi de Newton

$$\vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{a}$$

Soit :

$$\boxed{\boldsymbol{m\,r\,\ddot{\theta}\;\vec{T}(\theta) + m\,r\,\dot{\theta}^2\,\vec{n}(\theta) = m\,g\,\vec{\imath} + F\,\vec{n}(\theta)}}$$

A ce stade, on voit qu'il est intéressant de décomposer $\vec{\imath}$ sur la base orthonormée $\left(\vec{T}(\theta), \vec{n}(\theta)\right)$ et le produit scalaire est un outil parfaitement adapté car :

$$\vec{\imath} = \left(\vec{\imath}\cdot\,\vec{T}(\theta)\right)\,\vec{T}(\theta) + \left(\vec{\imath}\cdot\,\vec{n}(\theta)\right)\,\vec{n}(\theta)$$

Or :

$$\vec{\imath}\cdot\,\vec{T}(\theta) = \vec{\imath}\cdot\,(-sin(\theta)\,\vec{\imath} + cos(\theta)\,\vec{\jmath}) = -sin(\theta)$$

$$\vec{\imath}\cdot\,\vec{n}(\theta) = \vec{\imath}\cdot\,(-cos(\theta)\,\vec{\imath} - sin(\theta)\,\vec{\jmath}) = -cos(\theta)$$

Donc :

$$m\,r\,\ddot{\theta}\;\vec{T}(\theta) + m\,r\,\dot{\theta}^2\,\vec{n}(\theta) = m\,g\,\left(-sin(\theta)\,\vec{T}(\theta) - cos(\theta)\;\vec{n}(\theta)\right) + F\,\vec{n}(\theta)$$

Ce qui en identifiant les composantes sur les deux vecteurs de base conduit à

$$\begin{cases} m\,r\,\ddot{\theta} = -m\,g\,sin(\theta) \\ m\,r\,\dot{\theta}^2 = -m\,g\,cos(\theta) + F \end{cases}$$

La première équation donne **l'équation horaire angulaire du mouvement**. On la normalise en divisant par le coefficient de $\ddot{\theta}$:

$$\boxed{\boldsymbol{\ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\ sin(\theta)}}$$

La seconde équation donne la force exercée par la tige, une fois résolue l'équation horaire :

$$\boxed{\boldsymbol{F = m\,\left(r\,\dot{\theta}^2 + g\,cos(\theta)\right)}}$$

Toutefois, l'équation horaire du mouvement n'a pas de solution analytique connue. On peut bien sûr la résoudre avec des méthodes approchées mais cela fait perdre une grande capacité d'analyse des caractéristiques de ce mouvement.

On peut cependant résoudre l'équation horaire lorsque les angles θ ne sont pas trop grands.

e) Résolution de l'équation horaire angulaire dans l'approximation des petits angles

Rappelons que nous avons en mathématiques, pour θ exprimé en radians :

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{sin(\theta)}{\theta} = 1$$

Ce qui fait qu'on peut considérer pour des angles petits : $sin(\theta) \approx \theta$

Pour être plus précis, pour un angle de 15°, l'angle correspondant en radians est :

$$\theta = \frac{15}{180}\,\pi = \frac{\pi}{12}$$

Et une calculette donne :

$$\frac{\pi}{12} \approx 0{,}2618$$

$$sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0{,}2588$$

Donc, si on ne considère que deux chiffres significatifs on a donc bien $sin(\theta) = \theta$ pour des angles dont les valeurs en degrés sont comprises entre -15° et 15°.

L'équation horaire angulaire devient alors :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\ \theta$$

Elle est d'une forme mathématique remarquable en posant :

$$\boxed{\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r}}}}$$

Car elle s'écrit :

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{\theta}} = -\boldsymbol{\omega_0}^2\ \boldsymbol{\theta}}$$

Des solutions évidentes sont les fonctions de la forme :

$$\theta(t) = cos(\omega_0\, t) \text{ ou } \theta(t) = sin(\omega_0\, t)$$

En effet, prenons la première :

$$\theta(t) = cos(\omega_0\, t)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\omega_0\, cos(\omega_0\, t)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega_0{}^2\, cos(\omega_0\, t)$$

Donc :

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega_0{}^2\, \theta(t)$$

Idem pour la deuxième.

Plus généralement, pour deux constantes arbitraires A et B on obtient encore des solutions :

$$\theta(t) = A\, cos(\omega_0\, t) + B\, sin(\omega_0\, t)$$

Les mathématiques permettent alors de montrer que ce sont les seules.

Il reste donc à déterminer les valeurs de A et B en utilisant les conditions initiales de vitesse et de position. A $t = 0$, la position est :

$$\theta(0) = \theta_0$$

Cela se traduit par :

$$A\, cos(\omega_0\ \times 0) + B\, sin(\omega_0\ \times 0) = \theta_0$$

Soit :

$$\boxed{A = \theta_0}$$

La vitesse initiale étant nulle, on a :

$$r\, \dot{\theta}(0) = 0$$

Donc :

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

Or :

$$\dot{\theta}(t) = -A\, \omega_0\, sin(\omega_0\, t) + B\, \omega_0\, cos(\omega_0\, t)$$

Donc :

$$-A\, \omega_0\, sin(\omega_0\ \times 0) + B\, \omega_0\, cos(\omega_0\ \times 0) = 0$$

Soit :

$$B\, \omega_0 = 0$$

Donc :

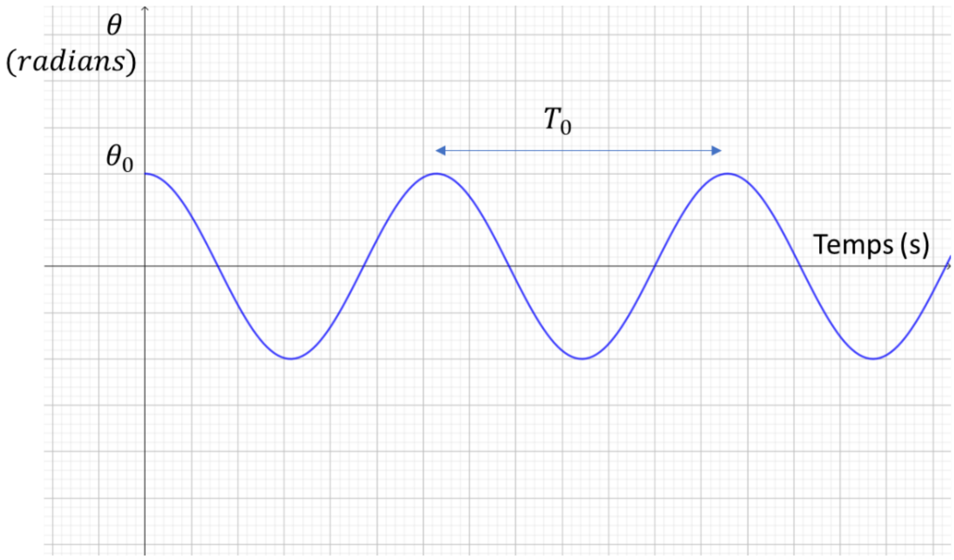
$$B = 0$$

Finalement, le mouvement angulaire est donné par :

$$\boxed{\boldsymbol{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0\, t)}}$$

C'est un mouvement oscillant à la période :

$$\boxed{\boldsymbol{T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0} = 2\,\pi\sqrt{\frac{r}{g}}}}$$



Remarque : on peut par analyse dimensionnelle contrôler la validité de la formule :

r est en m, g en $m\,s^{-2}$ donc le quotient est en s^2 et la racine en s, ce qui est bien la dimension d'un temps.

On peut alors formuler la loi suivante :

Le mouvement d'un pendule est périodique et sa période ne dépend pas de la masse du pendule, mais seulement de la distance du centre de gravité du pendule à l'axe de rotation et de la valeur locale de l'intensité de pesanteur.

Plus précisément :

Si on veut doubler la période d'oscillation d'un pendule, il faut quadrupler le rayon de la trajectoire du centre de gravité, si on veut tripler la période, il faut multiplier par 9 ce rayon.

Sur la Lune, où la valeur de l'intensité de pesanteur est environ cinq fois moins élevée qu'à la surface de la Terre, la période d'un pendule donné sera $\sqrt{5} \approx$ 2,2 fois plus grande que sur Terre. Un pendule oscillant à la période de 1 seconde sur Terre aura une période d'environ 2,2 secondes sur la Lune.

4) Etude des oscillations libres amorties :

On ne considère plus ici comme négligeable la force de résistance du fluide dans lequel se déplace la boule. On prend pour simplifier un modèle de frottement fluide de la forme :

$$\vec{f} = -K\, S\, \vec{v} = -K\, S\, r\, \dot{\theta}\ \vec{T}(\theta)$$

K étant une constante qui dépend des caractéristiques du fluide (sa viscosité notamment) et S la surface apparente de la boule, c'est-à-dire $S = \pi\, r^2$.

Il convient alors de rajouter un terme dans l'équation horaire angulaire qui devient :

$$m\, r\, \ddot{\theta} = -m\, g\, sin(\theta) - K\, S\, r\, \dot{\theta}$$

Soit pour des petits angles et après normalisation :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\ \theta - \frac{K\, S}{m}\ \dot{\theta}$$

On pose alors :

$$\boxed{\boldsymbol{2\, \alpha = \frac{K\, S}{m}}}$$

L'équation devient :

$$\boxed{\boldsymbol{\ddot{\theta} + 2\, \alpha\, \dot{\theta} + {\omega_0}^2\, \theta = 0}}$$

Et on peut montrer que la solution générale, dans le cas où α est négligeable devant ω_0 (frottements faibles), est de la forme :

$$\theta(t) = e^{-\alpha\, t}\, \big(A\, cos(\omega_0\, t) + B\, sin(\omega_0\, t)\big)$$

Or en posant :

$$A = C\, cos(\varphi)$$

$$B = C\, sin(\varphi)$$

On a :

$$\theta(t) = C\, e^{-\alpha\, t}\, \big(\, cos(\omega_0\, t)\, cos(\varphi) + B\, sin(\omega_0\, t)\, sin(\varphi)\big)$$

Soit :

$$\boxed{\boldsymbol{\theta(t) = C\, e^{-\alpha\, t}\ \ cos(\omega_0\, t + \varphi)}}$$

Le mouvement est donc pseudo périodique de pseudo période :

$$\boxed{\boldsymbol{T_0 = \frac{2\, \pi}{\omega_0} = 2\, \pi\, \sqrt{\frac{r}{g}}}}$$

Et si on considère un instant t_i pour lequel θ passe par un maximum local θ_i et l'instant $t_i + T_0$ pour lequel θ passe à nouveau par un maximum local θ_{i+1} alors :

$$Ln(\theta_i) - Ln(\theta_{i+1}) = Ln\left(\frac{\theta_i}{\theta_{i+1}}\right) = Ln\left(\frac{C\, e^{-\alpha\, t_i}}{C\, e^{-\alpha\, (t_i + T_0)}}\right) = Ln(e^{\alpha\, T_0}) = \alpha\, T_0$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{Ln(\theta_i) - Ln(\theta_{i+1})}{T_0}}$$

α est donc tout naturellement appelé **décrément logarithmique**. Il est donc le paramètre qui traduit la vitesse à laquelle les oscillations s'amortissent.