

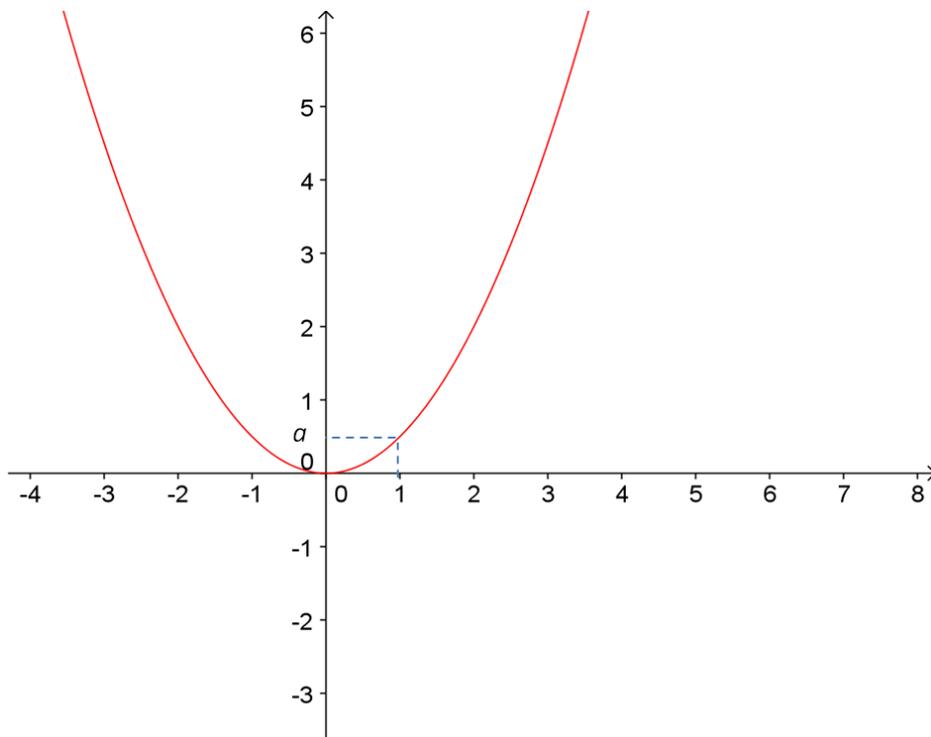
La parabole

1) Définition

Une parabole est une courbe plane qui possède dans un repère orthonormé une équation de la forme :

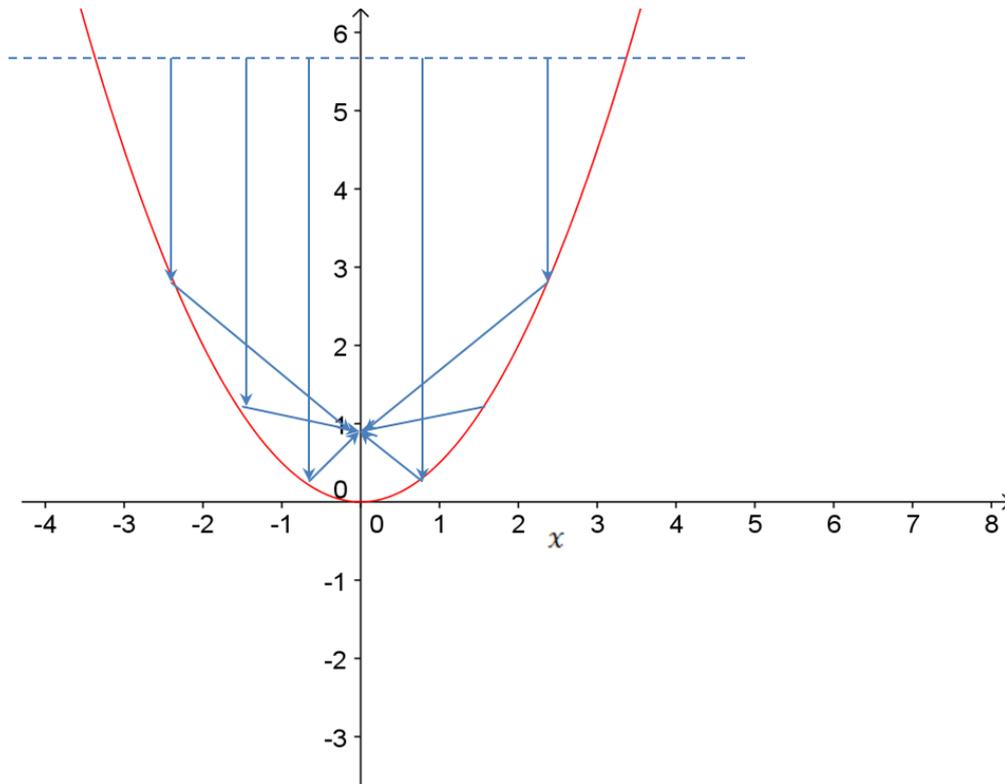
$$y = a x^2$$

Son allure est :



2) Propriété focale

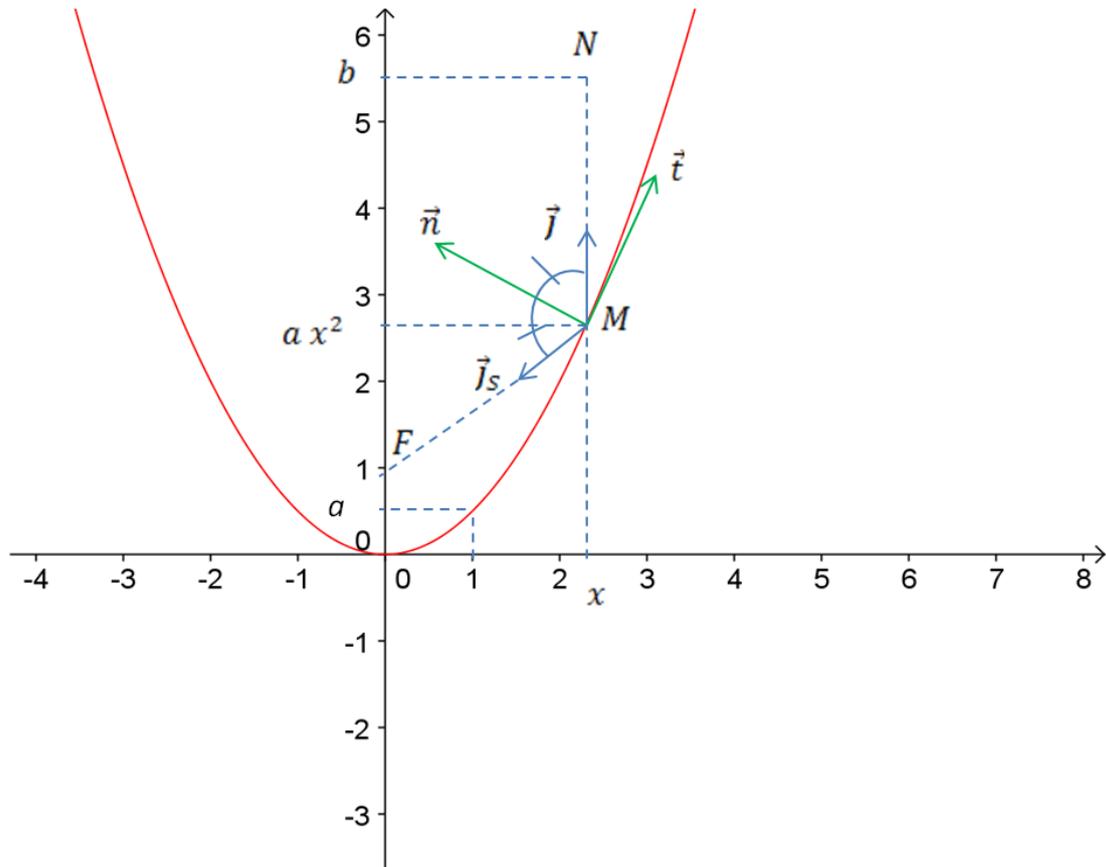
Un faisceau de rayons parallèles à l'axe de symétrie de la parabole et se réfléchissant sur la partie interne de cette dernière converge en un même point appelé foyer et les distances parcourues par chaque rayon à partir d'une ligne parallèle à l'axe des abscisses (en pointillé bleu sur la figure) sont les mêmes.



Nous allons démontrer cette propriété à l'aide de la description mathématique et nous en verrons les principales applications technologiques qui en découlent

Pour ce faire, désignons par :

- (O, \vec{i}, \vec{j}) le repère orthonormé associé au repère de la parabole
- b une ordonnée strictement positive quelconque
- N d'abscisse x quelconque non nulle et d'ordonnée b
- M le point de la courbe d'abscisse x donc d'ordonnée $a x^2$
- \vec{t} le vecteur tangent à la courbe et d'abscisse 1
- \vec{n} le vecteur directement perpendiculaire à \vec{t}
- \vec{j}_S le vecteur symétrique du vecteur \vec{j} par rapport au vecteur \vec{n}
- $F(0, f)$ le point d'intersection de la droite (M, \vec{j}_S) avec l'axe (O, \vec{j})
- $f(x) = a x^2$ la fonction associée à la courbe.



Nous avons :

$$\overline{OM} \begin{pmatrix} x \\ ax^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) = 2ax \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \begin{pmatrix} -2ax \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{j}_s = 2 \frac{(\vec{j} \cdot \vec{n})}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} - \vec{j}$$

Or :

$$\vec{j} \cdot \vec{n} = 0 \times (-2ax) + 1 \times 1 = 1$$

$$\|\vec{n}\|^2 = 4a^2x^2 + 1$$

Donc :

$$\vec{J}_S \left(\begin{array}{c} \frac{-4 a x}{4 a^2 x^2 + 1} \\ 2 \\ \frac{1 - 4 a^2 x^2}{4 a^2 x^2 + 1} - 1 = \frac{1 - 4 a^2 x^2}{4 a^2 x^2 + 1} \end{array} \right)$$

\vec{J}_S est donc colinéaire au vecteur :

$$\vec{k} \left(\begin{array}{c} -4 a x \\ 1 - 4 a^2 x^2 \end{array} \right)$$

Or :

$$\overrightarrow{FM} \left(\begin{array}{c} x \\ a x^2 - f \end{array} \right)$$

Ecrivons que ce vecteur est colinéaire au vecteur \vec{k} :

$$-4 a x (a x^2 - f) = x (1 - 4 a^2 x^2)$$

Et déduisons en f après avoir simplifié par x :

$$-4 a^2 x^2 + 4 a f = 1 - 4 a^2 x^2$$

$$f = \frac{1}{4 a}$$

Nous constatons que cette valeur ne dépend pas de x . Examinons alors la distance $NM + MF$:

$$NM = b - a x^2$$

$$\begin{aligned} MF &= \sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} = \sqrt{x^2 + a^2 x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16 a^2}} = \sqrt{a^2 x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16 a^2}} \\ &= \sqrt{\left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2} = ax^2 + \frac{1}{4a} \end{aligned}$$

D'où :

$$NM + MF = b + \frac{1}{4 a}$$

Cette distance ne dépend donc pas non plus de x

Applications technologiques

1) Antenne de réception

La propriété focale de la parabole s'illustre parfaitement dans les antennes, constituées d'un paraboloïde (surface de l'espace à symétrie de révolution et dont la coupe par un plan passant par cet axe est une parabole) sur lequel les ondes se réfléchissent en parvenant selon une incidence parallèle à l'axe de révolution pour se concentrer en un même point, le foyer, où est placé un récepteur chargé de transmettre le signal via un câble à un amplificateur et (ou un décodeur)

Le fait que les distances parcourues soit les mêmes fait que toutes le front d'onde, ensemble de points en phase qui est, avant réflexion, un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, se trouve transformé en un point unique, le foyer.

Ce dispositif permet donc une amplification passive de l'onde incidente. Plus la parabole présente de surface et plus cette amplification est importante. Elle est relayée par une amplification électronique du signal, une fois celui-ci transmis le long d'un câble coaxial avant d'être décodé.

Ci-dessous une antenne de réception satellite pour recevoir la télévision par exemple

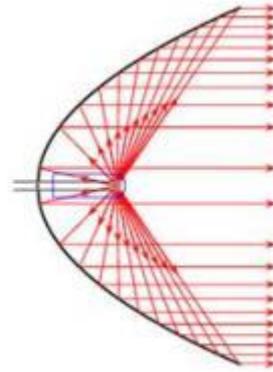
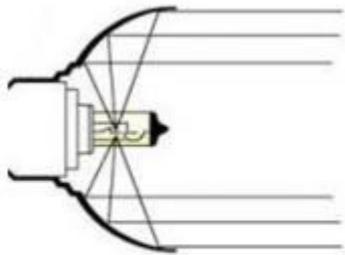


Ici, une antenne de 32 m de diamètre pour l'observation spatiale



2) Phare de voiture

Le but est non pas de recevoir une émission électromagnétique au foyer mais d'émettre de la lumière à partir d'une source placée au foyer. Le faisceau lumineux émis par la source se retrouve alors transformé après réflexion en un faisceau parallèle à l'axe de la parabole, ce qui est utile pour concentrer l'énergie lumineuse sur la route et non pas les bas côtés.



3) Four solaire





Ce four présente l'avantage de pouvoir être bricolé chez soi. Il est dirigé face au soleil dont les rayons vont ainsi converger au foyer où est placée la gamelle à chauffer. Attention à ne pas mettre le doigt au foyer, risque de brûlure ! Celui qui est présenté fait un mètre de diamètre. Comptez de l'ordre de 800 W de puissance rayonnante reçue par la gamelle par temps ensoleillé évidemment, donc la valeur d'une plaque de cuisson. Le bémol est pour les jours nuageux, autrement dit, en Normandie, ça se discute, mais au pays de la lavande et des cigales...