Ondes

CHAPITRE I :

Ondes sinusoïdales propagatives monodimensionnelles

Partons de la fonction de référence

$$\boxed{f(x) = \sin(x)}$$

Par dilatation – contraction horizontale nous en déduisons la fonction

$$\boxed{f(x) = \sin(k\,x) \qquad avec\ k > 0}$$

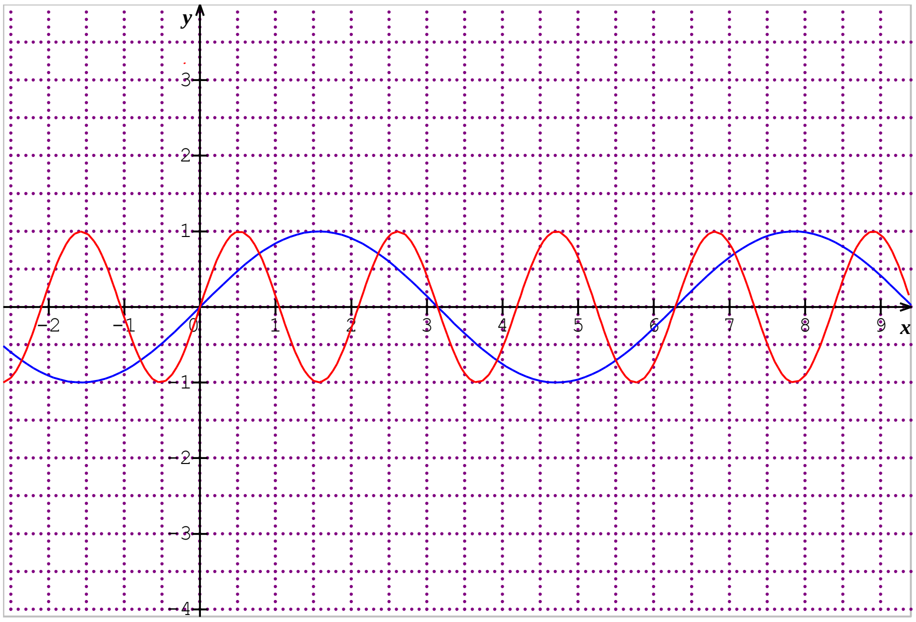


Figure 1 : en bleu sin(x) , en rouge sin(3 x))

Puis par dilation – contraction verticale la fonction

$$\boxed{f(x) = \mathrm{A}\sin(k\,x) \qquad \text{avec A} > 0}$$

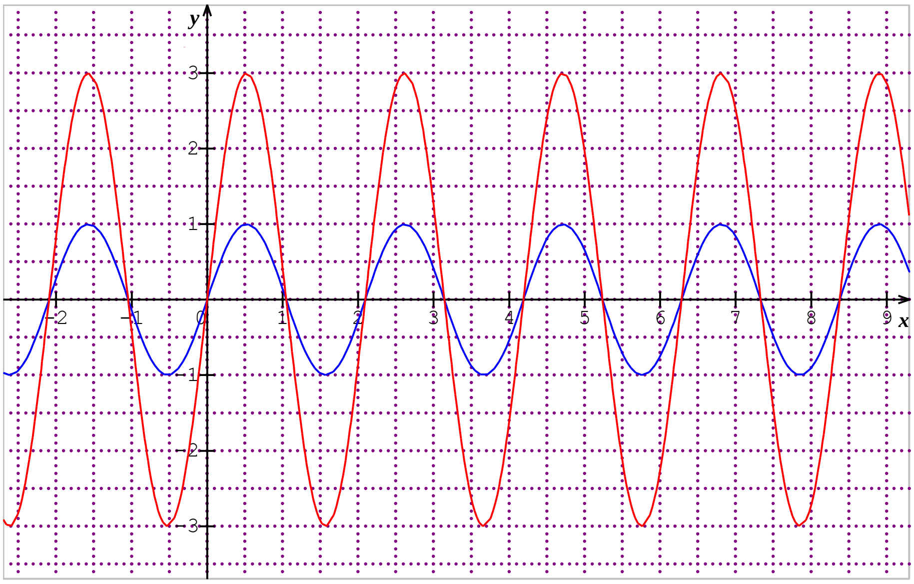


Figure 2 : en bleu sin(3 x) , en rouge 3 sin(3 x))

Dont les caractéristiques sont :

$$période\ spatiale\ (longueur\ d'onde) = \lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad unité\ SI : m$$

$$fréquence\ spatiale\ (nombre\ d'onde) = k = \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi} \quad unité\ SI : m^{-1}$$

$$Amplitude : A \qquad unité\ SI : m$$

Supposons que cette fonction représente la forme de l'onde à l'instant initial (t = 0). La forme à l'instant t se déduit par translation horizontale de valeur algébrique α = V t où V est la vitesse de l'onde :

$$f(x,t) = A\ \sin\big(k\ (x - \alpha)\big) = A\ \sin(k\,x - \omega\,t) \qquad avec\ \omega = k\,V$$

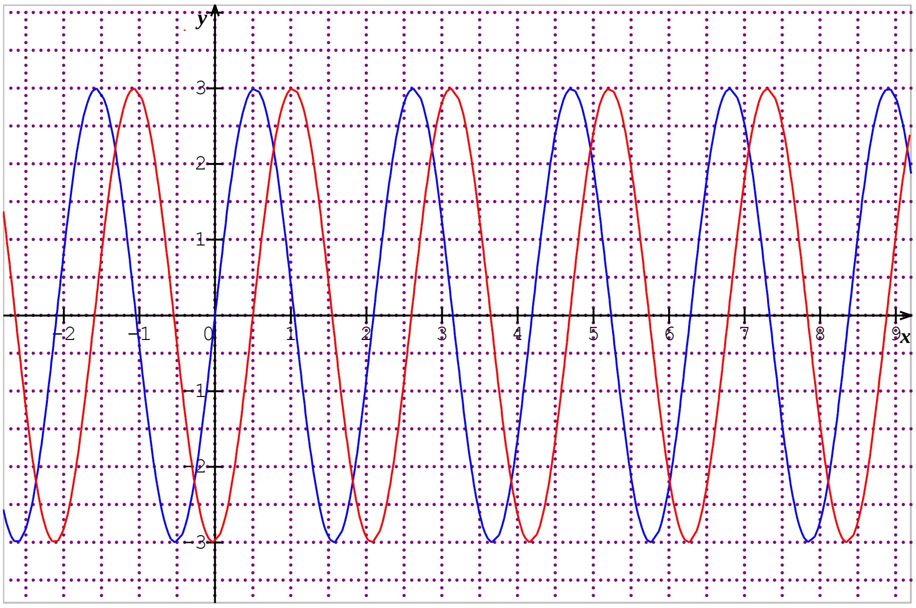


Figure 3 : en rouge 3 sin(3 x) , en bleu 3 sin(3 (x-0,5))

Cette fonction de deux variables x et t peut s'interpréter de deux façons :

A un instant t fixé $(\omega\ t\ est\ une\ constante)$, elle représente la forme de l'onde selon l'axe des x et correspond à une translation de la fonction précédente dans le sens des x croissants et de valeur α = V t. Elle a donc les même caractéristiques spatiales , longueur d'onde , nompre d'onde , amplitude que la fonction précédente qui représente la forme de l'onde à l'instant t = 0 (voir encadré ci-dessus).

En un point de l'axe des x fixé , si on imagine dans un plan perpendiculaire à cet axe et passant par ce point une bande déroulante qui enregistrerait la valeur de l'onde en fonction du temps, celle-ci imprimerait la fonction f(x, t) qui se présente alors comme une sinusoide fonction du temps (k x est une constante) donct les caractéristiques sont :

$$période\ temporelle\ (periode) = \ T = \frac{2\,\pi}{\omega} \qquad unité\ SI : s$$

$$fréquence\ temporelle\ = \ f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\,\pi} \qquad unité\ SI :\ m^{-1}$$

$$Amplitude : A \qquad unité\ SI : m$$

La relation liant pulsation spatiale et pulsation temporelle de l'onde est :

$$\omega = k\, V$$

Elle peut se réécrire par inversion :

$$\frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\,\pi}{k\,V}$$

Ce qui aboutit à une relation liant la période spatiale (longueur d'onde) et la période temporelle (période)

$$\lambda = \; V\,T$$

qui peut aussi s'écrire d'une manière utilisée fréquemment pour les ondes électromagnétiques , sous forme d'une relation liant longueur d'onde et fréquence (temporelle)

$$\lambda = \; \frac{V}{f}$$

CHAPITRE II : Equation d'ondes monodimensionnelle

Cherchons une équation vérifiée par la fonction f(x, t) précédente en dérivant par rapport à la variable x à t fixé puis par rapport à la variable t à x fixé :

A t fixé la fonction est de la forme $A\;\sin(a\,x + b)$ avec a = k et b = - ω t et nous avons établi que sa dérivée seconde est $-\,a^2\,A\;\sin(a\,x + b)$. Nous avons donc la relation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \; -k^2\,f$$

De même en une position x fixée la fonction est de la forme $A\;\sin(b - \omega t)$

Nous avons donc en dérivant deux fois par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \; -\omega^2\,f$$

Or nous avons également $\omega = k\,V$ donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -k^2 V^2 f = V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Soit finalement l'équation suivante qualifiée d'équation d'ondes à une dimension :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Le lecteur vérifiera aisément que pour une onde propagative sinusoidale à une dimension la forme de l'onde (si on choisit une phase nulle en x = 0 à t = 0) :

$$f(x,t) = A \sin\big(k\,(x + \mathrm{V\,t})\big) = A \sin(k\,x + \omega\,t) \qquad avec\ \omega = k\,V$$

Cette fonction vérifie la même équation d'ondes

<u>Cas général des ondes propagatives à une dimension</u>

Etant donnée une fonction deux fois dérivable quelconque g(x) supposée représenter la forme de l'onde à l'instant t = 0 . La forme de l'onde à l'instant t pour une propagation dans le sens des x croissants est obtenue par translation de la fonction g d'une valeur V t vers la droite soit :

$$f(x,t) = \mathrm{g}(\,x - V\,t)$$

Pour une onde se propageant dans le sens des x décroissants nous avons :

$$f(x,t) = \mathrm{g}(\,x + V\,t)$$

Dérivons deux fois l'une ou l'autre de ces fonctions en x à t fixé puis en t à x fixé. Utilisons pour cela la dérivation d'une composée :

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = (\,\mathrm{g}(\,\mathrm{X})\ \ \mathrm{o}\ (\mathrm{x} - \mathrm{V\,t})\,)' = (\mathrm{g}'(\mathrm{X})\mathrm{o}\ (\mathrm{x} - \mathrm{V\,t}).\,(1) = \mathrm{g}'(\mathrm{x} - \mathrm{Vt})$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2} = (\,\mathrm{g}'(\,\mathrm{X})\ \ \mathrm{o}\ (\mathrm{x} - \mathrm{V\,t})\,)' = (\mathrm{g}''(\mathrm{X})\mathrm{o}\ (\mathrm{x} - \mathrm{V\,t}).\,(1) = \mathrm{g}''(\mathrm{x} - \mathrm{Vt})$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t}} = (\,\mathrm{g}(\,\mathrm{X})\ \ \mathrm{o}\ (\mathrm{x} - \mathrm{V\,t})\,)' = (\mathrm{g}'(\mathrm{X})\mathrm{o}\ (\mathrm{x} - \mathrm{V\,t}).\,(-\mathrm{V}) = -\,\mathrm{V}\,\mathrm{g}'(\mathrm{x} - \mathrm{Vt})$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t}^2} = (- \mathrm{V}\, \mathrm{g}'(\mathrm{X}) \; \mathrm{o}\; (\mathrm{x} - \mathrm{V}\, \mathrm{t}))' = (-\mathrm{V}\, \mathrm{g}''(\mathrm{X}) \mathrm{o}\; (\mathrm{x} - \mathrm{V}\, \mathrm{t}).(-\mathrm{V})$$
$$= \mathrm{V}^2\, \mathrm{g}''(\mathrm{x} - \mathrm{Vt})$$

On en déduit que la fonction f vérifie l'équation d'onde

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}$$

Il en est de même de manière analogue pour une onde propagative dans le sens des x décroissants

CHAPITRE II : Ondes stationnaires monodimensionnelles

Intuitivement on formule l'idée qu'un système pouvant vibrer librement dans une dimension, comme une corde de guitare, a une forme de vibration correspondant à la superposition d'une onde se propageant dans le sens des x croissant et d'une se propageant dans le sens des x decroissants autrement dit qu'elle est de la forme :

$$\boxed{f(x,t) = \mathrm{g}(x - V\, t) + h(x + V\, t)}$$

Où g et h sont des fonctions deux fois dérivables

On vérifie aisément par linéarité de la dérivation que f satisfait l'équation d'onde. On peut d'ailleurs montrer que les solutions de l'équation d'onde sont les fonctions de ce type.

Or d' après le théorème de Fourier, si g et h sont par exemple à domaine de définition borné, on peut les décrire à l'aide de fonctions sinus et cosinus sous forme

$$\boxed{g(x) = \sum A\; \sin(k\, x) + B\cos(k\, x) = \sum C\; \sin(k\, x + \varphi)}$$

Ainsi La forme générale d'une onde propagative ou stationnaire est

$$\boxed{f(x,t) = \sum C\; \sin(k\, (x - V\, t) + \varphi) + D\cos(k\, (x + Vt) + \varphi')}$$

<u>Exemple d'application</u> :

Considérons une corde tendue entre deux points (corde de guitare ou de piano) et cherchons les solutions sous forme de la superposition d'une onde propagative dans le sens des x croissants et d'une onde propagative dans le sens des x décroissants de même nombre d'onde k

$$\boxed{f(x,t) = C\,\cos(k\,x - \omega\,t\, +\, \varphi) + D\cos(\,k\,x + \omega\,t + \,\varphi')\; avec\; \omega = k\,V}$$

La fixation de la corde aux positions d'abscisse x = 0 et x = L impose les conditions dites conditions aux limites :

$$\boxed{\text{Pour tout} \quad t > 0 \quad \begin{cases} f(0,t) = 0 \\ f(L,t) = 0 \end{cases}}$$

La première condition s'écrit :

$$C\,\cos(-\omega\,t\, +\, \varphi) + D\cos(\,\omega\,t + \,\varphi')\, = 0$$

Soit pour tout t > 0 :

$$(C\,\cos(\varphi) + D\cos(\varphi'))\,\cos(\omega\,t)\, +\, (C\,\sin(\varphi) - D\sin(\varphi'))\,\sin(\omega\,t) = 0$$

D'où

$$\begin{cases} C\,\cos(\varphi) + D\cos(\varphi')\, = 0 \\ C\,\sin(\varphi) - D\sin(\varphi')\, = 0 \end{cases}$$

Pour que ce système ait une solution non triviale (A ;B) = (0 ;0), il faut que son déterminant soit nul soit :

$$-\cos(\varphi)\,\sin(\varphi')\, -\, \cos(\varphi')\,\sin(\varphi) = 0$$

Soit :

$$\sin(\varphi + \varphi') = 0$$

D'où deux cas :

<u>1er cas : $\varphi + \varphi' = 0$</u>

Le système devient alors :

$$\begin{cases}(\mathrm{C}+\mathrm{D})\ \cos(\varphi)=0\\(\mathrm{C}+\mathrm{D})\ \sin(\varphi)=0\end{cases}$$

Donc :

C = - D

Et :

$$\boxed{f(x,t) = \ C\ \ (\ \cos(k\,x - \omega\,t\ +\ \varphi) -\ \cos(\ k\,x + \omega\,t -\ \varphi)\ )}$$

2e cas : $\varphi + \varphi' = \pi$

Le système devient alors :

$$\begin{cases}(\mathrm{C}-\mathrm{D})\ \cos(\varphi)=0\\(\mathrm{C}-\mathrm{D})\ \sin(\varphi)=0\end{cases}$$

Donc :

C = D

Et :

$$f(x,t) = \ C\ \ (\ \cos(k\,x - \omega\,t\ +\ \varphi) +\ \cos(\ k\,x + \omega\,t -\ \varphi + \pi)\ )$$

Soit :

$$\boxed{f(x,t) = \ C\ \ (\ \cos(k\,x - \omega\,t\ +\ \varphi) -\ \cos(\ k\,x + \omega\,t -\ \varphi)\ )}$$

Nous obtenons dons dans les deux cas la même expression pour la fonction d'onde.

Transformons alors cette expression à l'aide de la formule de trigonométrie :

$$\cos(\mathrm{a}) - \ \cos(\mathrm{b}) = -2\sin\left(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}\right)\ \sin\left(\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{2}\right)$$

Il vient

$$\boxed{f(x,t) = \ 2\ C\ \ \sin(k\ x)\ \ \sin(\ \omega\,t -\ \varphi)}$$

Appliquons alors la condition de nullité de f en x = L , soit pour tout t > 0 :

$$2\ \mathrm{C}\ \sin(\mathrm{k\,L})\ \sin(\ \omega\ \mathrm{t} - \ \varphi)\ = 0$$

On en déduit :

$$\sin(\mathrm{k\,L}) = 0$$

Soit , puisque k L > 0 :

$$\mathrm{k\,L} = \mathrm{n}\,\pi \qquad avec\ n\ \in \mathbb{N}^*$$

<u>d'où :</u>

$$\boxed{\mathrm{k}\ = \mathrm{n}\ \frac{\pi}{\mathrm{L}}\quad , n\ \in \mathbb{N}^*}$$

Chaque valeur de k définit une fonction f(x, t) appelé mode propre. Le mode correspondant à k = 1 est appelé fondamental, celui correpondant à k = 2 est appelé premier harmonique, k = 3, deuxième harmonique etc..

Un mode est généralement représenté graphiquement par la fonction f(x, t) à deux instants t et t' tels que $\sin(\omega\ \mathrm{t} - \ \varphi) = 1$ et $\sin(\omega\ \mathrm{t}' - \ \varphi) = -1$, ce qui sera l'aspect sous lequel il nous apparaîtra compte tenu de la persistance rétinienne.

Voyons ainsi les caractéristiques de ces modes. Nous noterons A = 2 C et supposerons l'origine des temps telle que $\varphi = 0$ pour plus de simplicité. De plus $\omega = \mathrm{k\,V}$, nous avons donc la forme générale du mode de rang n :

$$\boxed{\mathrm{f_n}(\mathrm{x,t}) = \ \mathrm{A}\ \sin(\mathrm{k_n\ x})\ \sin(\ \omega_\mathrm{n}\ \mathrm{t}) \qquad \text{avec}\ \ \mathrm{k_n} = \mathrm{n}\ \frac{\pi}{\mathrm{L}}\ \ \text{et}\ \omega_\mathrm{n} = \mathrm{n}\ \frac{\pi}{\mathrm{L}}\ \mathrm{V}}$$

A une abscisse x fixée, l'ordonnée y du point de la corde a un mouvement sinusoïdal périodique de caractéristiques :

<u>Période</u> :

$$\boxed{\mathrm{T_n} = \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{n}} = \frac{2\ \mathrm{L}}{\mathrm{n\ V}}}$$

<u>Fréquence</u> :

$$F_n = \frac{1}{T_n} = n\ \frac{V}{2L} = n\ F_1$$

Notons que les fréquences des harmoniques sont les multiples de la fréquence F_1 du mode fondamental.

Amplitude :

$$A_n = A\ |\sin(k_n\ x)|$$

La fonction f(x,t) appelée déformée de la corde à un instant quelconque se situe entre les courbes dites enveloppes :

$$f_n(x,t) = A\ \sin(k_n\ x)$$

$$f_n(x,t') = -A\ \sin(k_n\ x)$$

Ventres :

Le ou les ventres de vibrations sont les abscisses x en lesquels la vibration est d'amplitude maximale. Cela est défini par la condition :

$$|\sin(k_n\ x)| = 1$$

Ce sont donc les abscisses en lesquelles la fonction enveloppe $A\ \sin(k_n\ x)$ présente un maximum ou un minimum.

Nœuds :

Le ou les noeuds de vibrations sont les abscisses x en lesquels la vibration est d'amplitude nulle. Cela est défini par la condition :

$$\sin(k_n\ x) = 0$$

Ce sont donc les abscisses en lesquelles la fonction enveloppe $A\ \sin(k_n\ x)$ s'annule.

On s'intéresse donc à la période spatiale de la fonction enveloppe qui est :

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\ L}{n}$$

Etudions alors les caractéristiques des quatres premiers modes

<u>Mode fondamental :</u>

Caractéristiques :

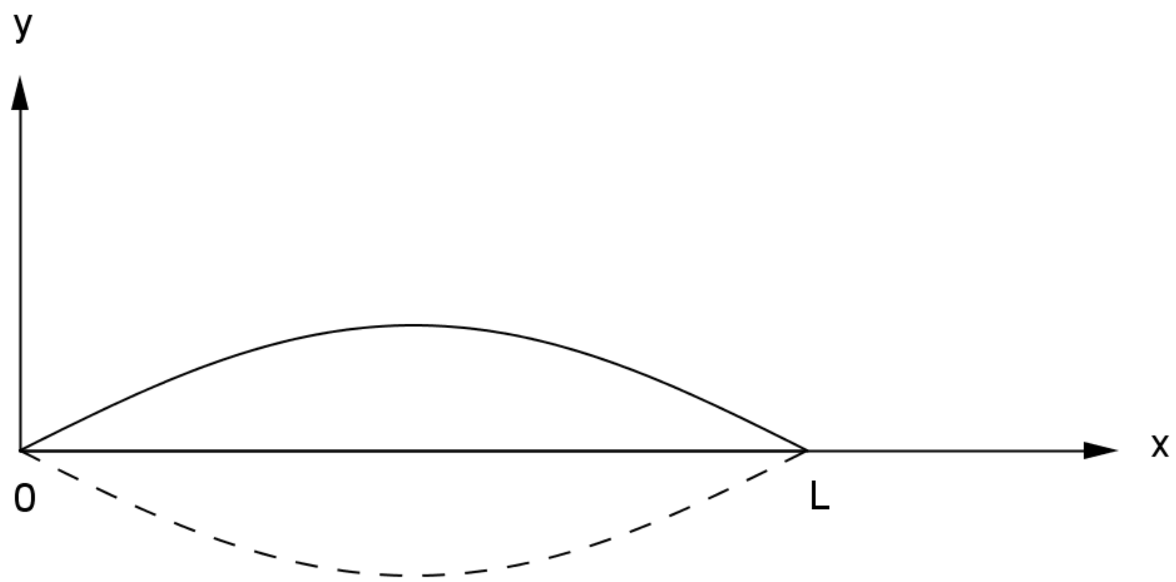
$$\text{Fréquence :} \quad F_1 = \frac{V}{2L}$$

$$\text{Longueur d'onde de l'enveloppe:} \quad \lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\,L}{1} = 2\,L$$

Nombre de ventres : 1

Nombre de noeuds : 2

Aspect visuel : 1 fuseau



Premier harmonique :

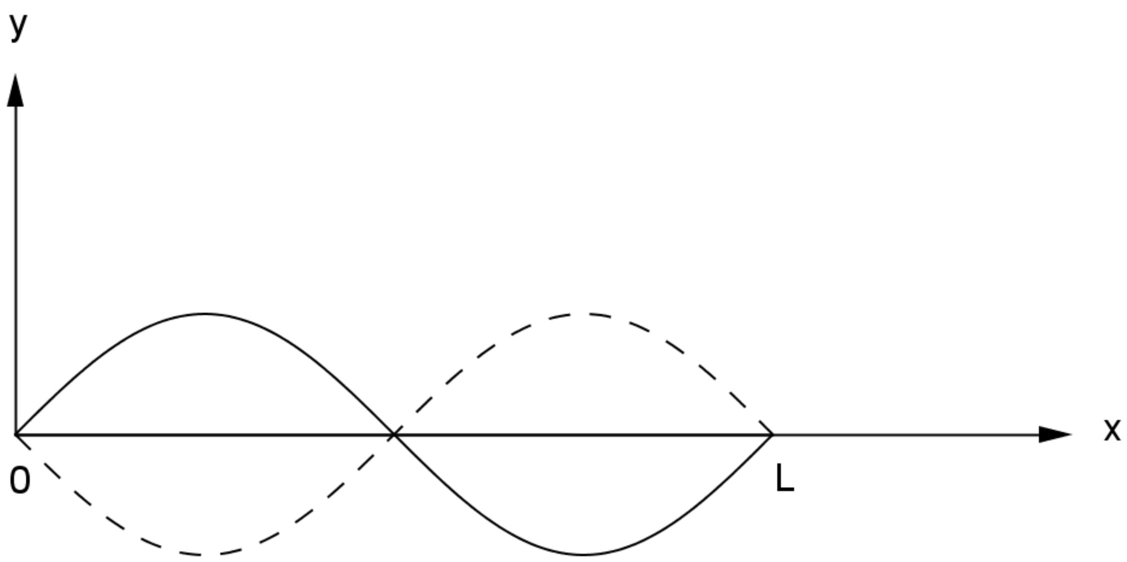
$$\text{Fréquence :} \quad F_2 = 2\,F_1$$

$$\text{Longueur d'onde de l'enveloppe:} \quad \lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{2\,L}{2} = L$$

Nombre de ventres : 2

Nombre de noeuds : 3

Aspect visuel : 2 fuseaux



Deuxième harmonique :

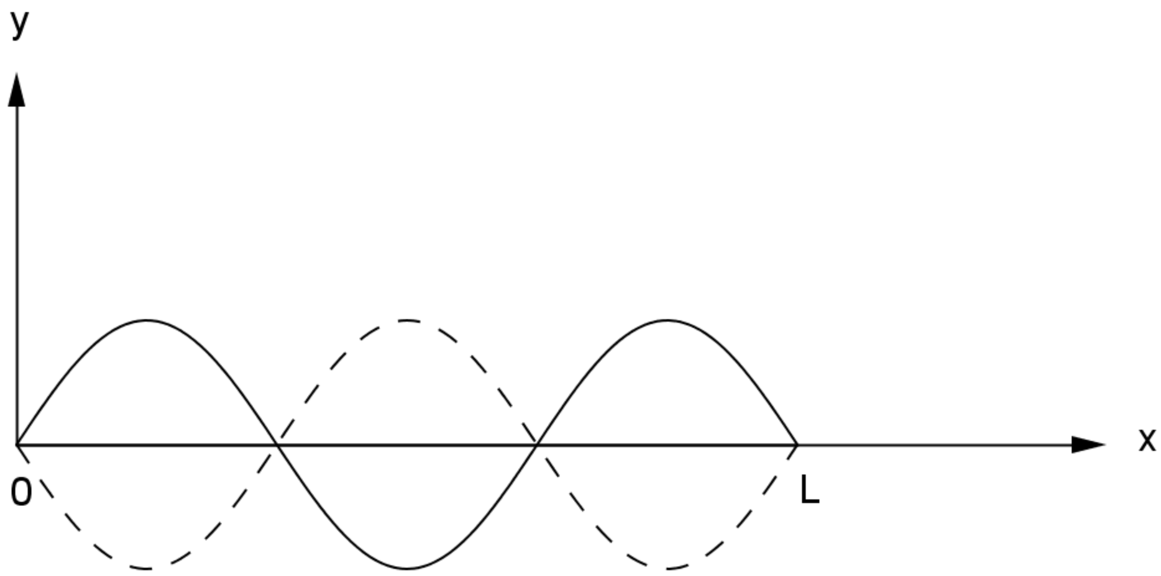
Fréquence : $F_3 = 3\ F_1$

Longueur d'onde de l'enveloppe: $\lambda_3 = \frac{2\pi}{k_3} = \frac{2\ L}{3}$

Nombre de ventres : 3

Nombre de noeuds : 4

Aspect visuel : 3 fuseaux



Troisième harmonique

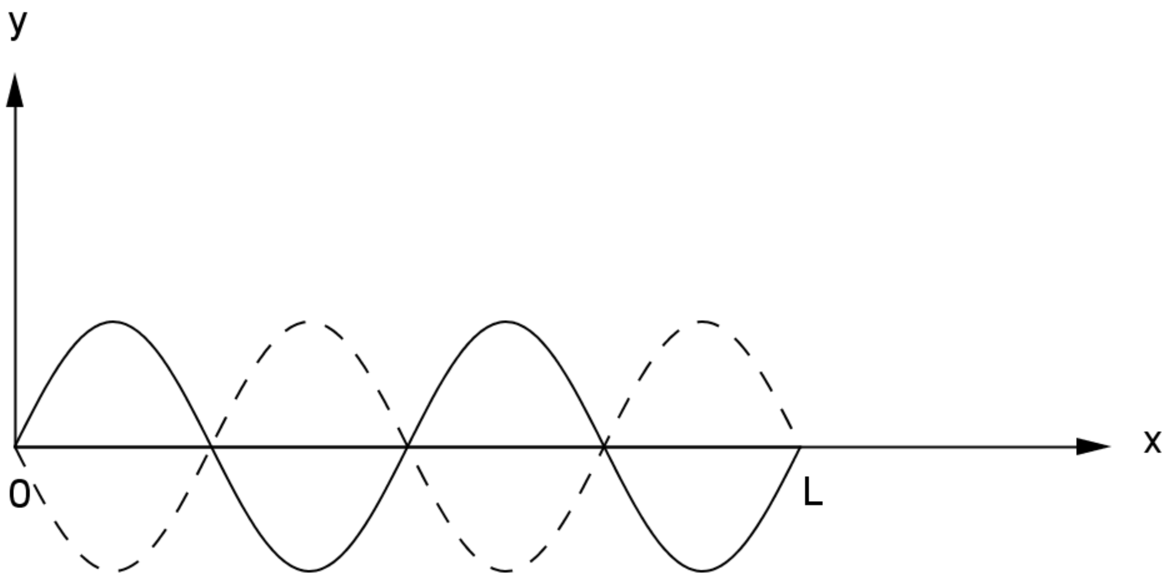
Fréquence : $F_4 = 4\,F_1$

Longueur d'onde de l'enveloppe: $\lambda_4 = \dfrac{2\pi}{k_4} = \dfrac{2\,L}{4} = \dfrac{L}{2}$

Nombre de ventres : 4

Nombre de noeuds : 5

Aspect visuel : 4 fuseaux



Le mode de rang n a donc n ventres et (n + 1) noeuds.

CHAPITRE IV :

Ondes propagatives multidimensionnelles.

On s'intéresse ici à des ondes pouvant se progager dans un plan comme les vagues à la surface de l'eau ou dans l'espace. La perturbation du milieu se traduit alors par une fonction de la forme f(x,y,t) pour une onde à deux dimensions et f(x,y,z,t) pour une onde à trois dimensions.

Là encore , la transformée de Fourier permet d'envisager l'étude en premier d'une classe particulière d'ondes, les ondes planes sinusoïdales se propageant dans une direction de vecteur $\vec{u}$.

Soit une base orthonormée (O; $x; y; z$) et un point M(x ;y ;z). Supposons pour simplifier que $\vec{u}$ soit dans le plan (O ;x ;y) et de norme unité. Soit un couple de vecteurs $(\vec{v}; \vec{w})$ tel que $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ soit une base orthonormée de l'espace. Posons alors :

$$\overrightarrow{OM} = X\,\vec{u} + Y\,\vec{v} + Z\,\vec{w}$$

Une onde plane sinusoïdale propagative dans la direction et le sens du vecteur $\vec{u}$ est alors une perturbation en M caractérisée par une fonction de la forme :

$$f(x, y, z, t) = A \sin(k\,X - \omega\,t + \varphi) \quad \text{avec } \omega = k\,V$$

Notons alors :

$$k\,X = k\,\vec{u}\,.\,\overrightarrow{OM}$$

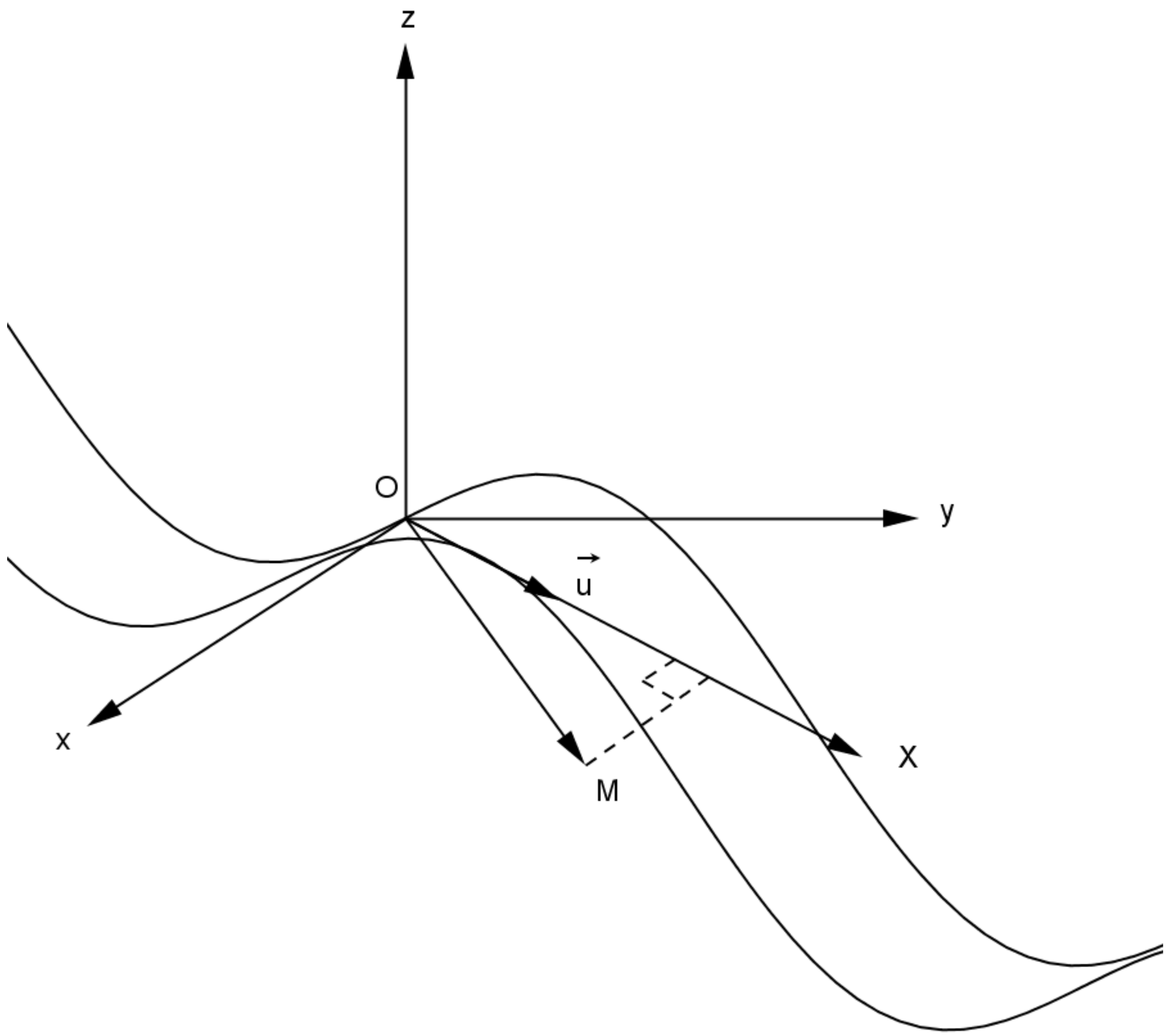
soit en appelant vecteur nombre d'onde le vecteur :

$$\vec{k} = k\,\vec{u}$$

$$\boxed{f(x, y, z, t) = A \sin\left(\vec{k}\,.\,\overrightarrow{OM} - \omega\,t + \varphi\right) \qquad \text{avec } \omega = \|\vec{k}\|\,V}$$

Sur la figure ci-dessous est représentée une onde plane à deux dimensions comme une vague à la surface de l'acean par exemple. La perturbation f est alors l'altitude d'un point M de la surface de l'eau par rapport au niveau de l'ocean en l'absebce de vague. Elle donc s'exprime sous la forme :

$$f(x, y, t) = A \sin\left(\vec{k}\,.\,\overrightarrow{OM} - \omega\,t + \varphi\right) \qquad \text{avec } \omega = \|\vec{k}\|\,V$$



Pour une onde plane propagative quelconque de vecteur nombre d'onde $\vec{k}$, l'expression plus générale est :

$$\boxed{f(x,y,z,t) = g(X - V\,t) = g\left(\vec{u}\,.\,\overrightarrow{OM} - V\,t\right)}$$

g étant une fonction quelconque d'une variable.

En supposant que g soit deux fois dérivable sur son domaine et en notant (a ; b ; c) les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base (x,y,z) on a alors :

$$f(x,y,z,t) = g(a\,x + b\,y + c\,z - V\,t)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = V^2\, g''(a\,x + b\,y + c\,z - \;V\,t)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a^2\, g''(a\,x + b\,y + c\,z - \;V\,t)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = b^2\, g''(a\,x + b\,y + c\,z - \;V\,t)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = c^2\, g''(a\,x + b\,y + c\,z - \;V\,t)$$

Or on a :

$$\|\vec{u}\,\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \;V^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$$

On appelle laplacien de f la quantité :

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

L’équation d’ondes multidimensionnelle s’écrit alors :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \;V^2\, \Delta f}$$