Normes de Hölder

1) Rappel des inégalités de Hölder

Inégalité discrète :

Soit p et q deux réels positifs ou nuls tels que :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Alors, pour tous n-uplets de réels x et y positifs ou nuls :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Inégalité intégrale :

Soit f et g deux fonctions intégrables et positives ou nulles sur un intervalle $[a,b]$ telles que f^p et g^q soient intégrables sur le même intervalle, alors :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b \big(f(x)\big)^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \big(g(x)\big)^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

2) Normes de Hölder :

a) norme discrète :

Pour $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $p\in[1,+\infty[$ on pose :

$$\|X\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Alors l'application : $X\to\|X\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve :

L'application est clairement à valeurs positives ou nulles.

Soit $\big(X=(x_1,x_2,\dots,x_n),Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\big)\in(\mathbb{R}^n)^2,\lambda\in\mathbb{R}$ alors :

$$\|X\|_p=0 \Leftrightarrow X=0$$

$$\|\lambda X\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda\, x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^p |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|X\|_p$$

Inégalité triangulaire :

$$\|X+Y\|_p{}^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)\, |x_i + y_i|^{p-1}$$

$$\|X+Y\|_p{}^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i|\, |x_i + y_i|^{p-1}$$

On introduit alors le réel q tel que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Et on applique l'inégalité de Hölder :

$$\|X+Y\|_p{}^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i + y_i|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i + y_i|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

On note alors que :

$$(p-1)\, q = p$$

Ainsi :

$$\|X+Y\|_p{}^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\|X+Y\|_p{}^p \leq \left(\|X\|_p + \|Y\|_p\right) \|X+Y\|_p{}^{\frac{p}{q}}$$

Deux cas sont alors à envisager :

1er cas : $\|X+Y\|_p = 0$ et dans ce cas

$$\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$$

2ème cas : $\|X+Y\|_p > 0$

On a alors :

$$\|X+Y\|_p{}^{p-\frac{p}{q}} \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$$

Soit :

$$\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$$

b) norme intégrale :

On note $\boldsymbol{\mathcal{C}_0}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])$ l'ensemble des applications $\boldsymbol{f}$ continues de $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{p}} = \left(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|^{\boldsymbol{p}}\, \boldsymbol{dx}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Alors l'application : $\boldsymbol{f} \to \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{p}}$ est une norme sur $\boldsymbol{\mathcal{C}_0}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])$.

Preuve :

L'application est clairement à valeurs positives ou nulles.

Soit $(f,g) \in \left(\mathcal{C}_0([a,b])\right)^2, \lambda \in \mathbb{R}$ alors :

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$$\|\lambda f\|_p = \left(\int_a^b |\lambda f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b |\lambda|^p\, |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p$$

$$\|f+g\|_p{}^p = \int_a^b |f(x)+g(x)|^p\, dx \leq \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)\, |f(x)+g(x)|^{p-1}\, dx$$

$$\|f+g\|_p{}^p \leq \int_a^b |f(x)|\, |f(x)+g(x)|^{p-1}\, dx + \int_a^b |g(x)|\, |f(x)+g(x)|^{p-1}\, dx$$

On introduit alors le réel q tel que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Et on applique l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p{}^p \leq & \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (|f(x)+g(x)|^{p-1})^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \left(\int_a^b |g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (|f(x)+g(x)|^{p-1})^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

On note alors que :

$$(p-1)\, q = p$$

Ainsi :

$$\|f+g\|_p{}^p \leq \left(\left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\|f+g\|_p{}^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\, \|f+g\|_p{}^{\frac{p}{q}}$$

Deux cas sont alors à envisager :

1er cas : $\|f+g\|_p = 0$ et dans ce cas

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

2ème cas : $\|f+g\|_p > 0$

On a alors :

$$\|f+g\|_p{}^{p-\frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Soit :

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$