Matrices nilpotentes

I Définition :

Soit A une matrice carrée non nulle d'ordre $n \geq 1$ et à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$.
Alors A est nilpotente si il existe un entier naturel non nul m tel que :

$$\boldsymbol{A^m = 0}$$

Le plus petit de ces entiers est appelé indice de nilpotence. Nous le noterons p.

Il en résulte :

$$\forall\, k \in [\![1, p-1]\!] : A^k \neq 0$$

$$\forall\, k \in [\![p, +\infty[\![\ : A^k = 0$$

Autrement dit, les puissances de A sont toutes nulles à partir d'un certain exposant qui est l'indice de nilpotence.

Une matrice nulle est nilpotente.

II Exemples

Exemple 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est nilpotente d'indice 3.

Exemple 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est nilpotente d'indice 4.

Exemple 3 :

De façon plus générale, toute matrice d'ordre n à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$, triangulaire supérieure et avec des 0 sur la diagonale est nilpotente. Nous verrons plus loin avec la décomposition de Jordan, que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice du type précédent.

En d'autres termes : les matrices nilpotentes sont les matrices semblables aux matrices triangulaires supérieures avec des 0 sur la diagonale.

Preuve :

Introduisons la base canonique de l'espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne :

$$\left(E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Alors :

$$A\, E_1 = 0$$

Et pour tout $j \in [\![2, n]\!]$:

$$A\, E_j \in Vect\left[E_1, E_2, .. E_{j-1}\right], A^2\, E_j \in Vect\left[E_1, E_2, .. E_{j-2}\right], A^3\, E_j \in Vect\left[E_1, E_2, .. E_{j-3}\right]\ etc \dots$$

Donc il existe entier $k_j \in [\![1, n]\!]$ tel que :

$$A^{k_j}\, E_j = 0, \qquad A^{k_j - 1}\, E_j \neq 0$$

En désignant par p le plus grand de tous les k_j on a :

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!] :\ A^p\, E_j = 0, \qquad \exists\, j \in [\![1, n]\!] :\ A^{p-1}\, E_j \neq 0$$

Donc :

$$A^p = 0, \qquad A^{p-1} \neq 0$$

A est donc nilpotente d'indice de nilpotence p.

III Décomposition de Jordan d'une matrice nilpotente

Soit A une matrice d'ordre n à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ nilpotente d'indice de nilpotence p. Alors A est semblable à une matrice formée de blocs diagonaux (dits blocs de Jordan) de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ces blocs sont d'ordre inférieur ou égal à p et au moins un des blocs est d'ordre p.

Exemples de blocs de Jordan :

D'ordre 1 :

$$(\mathbf{0})$$

D'ordre 2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'ordre 3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tout bloc de Jordan d'ordre k est nilpotent d'indice de nilpotence k

Preuve :

Désignons par $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel des colonnes d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, soit :

$$\mathbb{E} = Vect\left[E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Comme $A^{p-1} \neq 0$, cette matrice possède une colonne non nulle, donc :

$$\exists\ j_0 \in [\![1, n]\!] :\ A^{p-1} E_{j_0} \neq 0$$

Considérons alors la famille :

$$\left(A^{p-1} E_{j_0}, A^{p-2} E_{j_0}, \dots A\ E_{j_0}, E_{j_0}\right)$$

Et montrons qu'elle est libre en partant d'une combinaison linéaire nulle :

$$a_{p-1}\ A^{p-1} E_{j_0} + a_{p-2}\ A^{p-2} E_{j_0} + \cdots a_1\ A\ E_{j_0} + a_0\ E_{j_0} = 0$$

En multipliant par A^{p-1} à gauche on obtient :

$$a_0\, A^{p-1}\, E_{j_0} = 0$$

Donc :

$$a_0 = 0$$

Puis en multipliant par A^{p-2} à gauche :

$$a_1 = 0$$

Et ainsi de suite par récurrence, on obtient que tous les coefficients sont nuls.

<u>Remarque</u> :

Le sous-espace vectoriel engendré par cette famille, qualifié de sous espace cyclique (ou monogène) est :

$$\mathbb{F} = \boldsymbol{Vect}\left[\boldsymbol{A^{p-1}E_{j_0}}, \boldsymbol{A^{p-2}E_{j_0}}, \dots \boldsymbol{A\, E_{j_0}}, \boldsymbol{E_{j_0}}\right] = \boldsymbol{Vect}\left[\left(\boldsymbol{A^{m}E_{j_0}}\right)_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{N}}\right]$$

L'endomorphisme restreint à cet espace : $\boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{A\, X}$ a pour matrice dans la base $\left(\boldsymbol{A^{p-1}E_{j_0}}, \boldsymbol{A^{p-2}E_{j_0}}, \dots \boldsymbol{A\, E_{j_0}}, \boldsymbol{E_{j_0}}\right)$ un bloc de Jordan d'ordre $\boldsymbol{p}$.

L'idée suivante est de déterminer un sous espace supplémentaire de ce sous espace qui soit stable par A.

$A^{p-1}\, E_{j_0}$ n'étant pas une colonne nulle, désignons par i_0 l'indice de ligne d'un de ses termes c_{i_0} non nul et formons une matrice L ayant une ligne et n colonnes, tous ses termes nuls sauf celui d'indice i_0 valant 1. Ainsi :

$$L\, A^{p-1}\, E_{j_0} = c_{i_0} \neq 0$$

Formons alors une matrice M à p lignes et n colonnes dont les lignes sont $L, L\, A, L\, A^2, \dots, L\, A^{p-1}$

$$\begin{array}{ccc} & n & \\ M = & \begin{pmatrix} L \\ L\, A \\ \vdots \\ L\, A^{p-1} \end{pmatrix} & p \end{array}$$

Montrons que les lignes de cette matrice forment un système libre en partant d'une combinaison linéaire nulle :

$$a_0\, L + a_1\, L\, A + a_2\, L\, A^2 + \dots + a_{p-1}\, L\, A^{p-1} = 0$$

Multiplions à droite par $A^{p-1}\, E_{j_0}$ on obtient :

$$a_0\, L\, A^{p-1}\, E_{j_0} = 0$$

Soit :

$$a_0 = 0$$

Puis en multipliant par $A^{p-2}\, E_{j_0}$:

$$a_1 = 0$$

Et ainsi de suite par récurrence, on aboutit à la nullité des coefficients.

La matrice M ayant le même rang que sa transposée, elle est donc de rang p. Le théorème du rang donne alors :

$$dim\big(ker(M)\big) = dim(\mathbb{E}) - rang(M) = n - p$$

Montrons alors que $\mathbb{F}$ et $ker(M)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$.

Soit $X \in \mathbb{F} \cap ker(M)$ alors :

$$X = a_{p-1}\, A^{p-1}E_{j_0} + a_{p-2}\, A^{p-2}E_{j_0} + \cdots a_1\, A\, E_{j_0} + a_0\, E_{j_0}$$

Et

$$M\, X = 0$$

soit :

$$L\, A^{p-1}X = L\, A^{p-2}X = \cdots L\, A\, X = L\, X = 0$$

$L\, A^{p-1}X = 0$ conduit à $a_0 = 0$

$L\, A^{p-2}X = 0$ conduit à $a_1 = 0$

Et ainsi de suite par récurrence, on obtient que tous les a_k sont nuls et donc que X est nulle.

De plus :

$$dim(\mathbb{F}) + dim\big(ker(M)\big) = p + (n - p) = n = dim(\mathbb{E})$$

Donc :

$$\boxed{\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus ker(M)}$$

Montrons maintenant que $ker(M)$ est stable par A.

Soit $X \in ker(M)$ alors :

$$M\, X = 0$$

soit :

$$L\, A^{p-1}X = L\, A^{p-2}X = \cdots L\, A\, X = L\, X = 0$$

Donc :

$$L\, A^{p-1}(A\, X) = L\, A^{p-2}(A\, X) = \cdots L\, A\, (A\, X) = L\, (A\, X) = 0$$

Ainsi :

$$A\, X \in ker(M)$$

Considérons alors une base $\big(X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n\big)$de $ker(M)$. Alors la famille suivante est une base de $\mathbb{E}$:

$$\big(A^{p-1}E_{j_0}, A^{p-2}E_{j_0}, \dots\ A\, E_{j_0}, E_{j_0}, X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n\big)$$

Dans cette base, l'endomorphisme canonique de $\mathbb{E}$: $X \to A\,X$ a une matrice de la forme :

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cc} \qquad\qquad p \qquad\qquad & \qquad n-p \qquad \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} p \\ \\ \\ \\ \\ n-p \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & \cdots\ 0\ \cdots \\
0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\
0 & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \\
\hline
 & & \vdots & & & \\
 & & \cdots\ 0\ \cdots & & & B \\
 & & \vdots & & &
\end{array}\right)
\end{array}$$

Notons A' cette matrice et Q la matrice dont les colonnes sont les éléments de la base précédente (donc matrice de passage de la base canonique à cette base). Alors :

$$A' = Q^{-1}\,A\,Q$$

Donc :

$$A'^p = Q^{-1}\,A^p\,Q = 0$$

Par conséquent :

$$B^p = 0$$

B est donc nilpotente d'indice de nilpotence inférieur ou égal à p.

On peut donc maintenant établir la propriété initiale par récurrence sur l'ordre n de la matrice nilpotente.

L'initialisation se fait pour $n = 1$:

Soit A nilpotente d'ordre 1 et d'indice de nilpotence $p \geq 1$. Alors A est constituée d'un seul terme qui est nul et donc A est un bloc de Jordan d'ordre 1.

L'hérédité découle de ce que l'on vient de montrer. En effet, supposons la propriété établie jusqu'à l'ordre $n \geq 1$. Considérons une matrice nilpotente A d'ordre $n+1$ et d'indice de nilpotence p. D'après ce qui précède, cette matrice peut se mettre sous la forme :

$$A = Q\,A'\,Q^{-1}$$

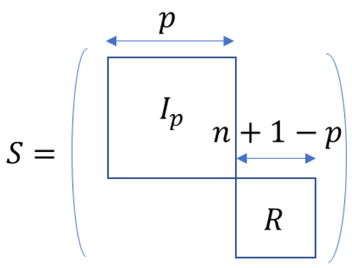
où A' est formée de deux blocs diagonaux, un bloc de Jordan J_1 d'ordre p et un bloc nilpotent B d'indice de nilpotence inférieur ou égal à p :

$$\begin{array}{cc}
p & n+1-p \\
\left(\begin{array}{c|c} J_1 & \\ \hline & B \end{array}\right.
\end{array}\!\!\!\!\left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right)$$

Appliquons à B l'hypothèse de récurrence. Il existe une matrice inversible R d'ordre $n+1-p$ et une matrice J formée de blocs de Jordan d'ordres inférieurs à p et telles que :

$$B = R\,J\,R^{-1}$$

Formons une matrice inversible S d'ordre $n+1$ avec un bloc diagonal identité d'ordre p et un bloc diagonal R



Alors, en utilisant le calcul matriciel par blocs :

$$A' = S\,J'\,S^{-1}$$

Où J' est une matrice formée du bloc diagonal de Jordan J_1 et des blocs diagonaux de Jordan de J.

Ainsi :

$$A = Q\,A'Q^{-1} = (Q\,S)\,J'\,(Q\,S)^{-1}$$

Ce qui prouve l'hérédité.

IV Sous espaces stables associés à une matrice nilpotente

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ et $\mathbb{E}_n$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et à une colonne et à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit qu'un sous espace vectoriel $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}_n$ est stable par A si :

$$\forall\, \boldsymbol{X} \in \mathbb{F} : \boldsymbol{A\,X} \in \mathbb{F}$$

Soit A la matrice d'ordre n définie par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, les sous espaces stables de A sont les suivants :

$$\mathbb{F}_0 = \{\vec{0}\}$$

$$\forall\, \boldsymbol{p} \in [\![1,..,n]\!] : \ \mathbb{F}_p = \boldsymbol{Vect}\left[\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}, \dots, \boldsymbol{E_p}\right], \boldsymbol{dim}(\mathbb{F}_p) = \boldsymbol{p}$$

Où :

$$\left(\boldsymbol{E_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \boldsymbol{E_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{E_n} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}\right)$$

est la base canonique de $\mathbb{E}_n$

Preuve :

Les sous espaces $\mathbb{F}_p$ sont de façon évidente stables par A car :

$$A\,\mathbb{F}_p = Vect\left[A\,E_1, A\,E_2, \dots, A\,E_p\right] = Vect\left[\vec{0}, E_1, \dots, E_{p-1}\right] \subset Vect\left[E_1, \dots, E_p\right]$$

Soit alors $\mathbb{F}$ un sous espace stable par A non réduit au vecteur nul.

$$I = \{i \in [\![1, n]\!] : X \in \mathbb{F}\,, X[i] \neq 0\ \}$$

où $X[i]$ désigne l'élément de X se situant à la ligne de numéro i.

Notons alors :

$$i_0 = max(I)$$

Soit alors $X \in \mathbb{F}$ tel que : $X[i_0] \neq 0$. Considérons :

$$\mathbb{G} = Vect\left[X, A\,X, \dots, A^{\,i_0-1}X\right]$$

Alors, en notant que l'effet de la multiplication de A par X est de décaler d'un rang vers le haut les éléments de X en enlevant le premier, on a :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{i_0-1} \\ x_{i_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A\,X = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{i_0} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots., A^{\,i_0-1}X = \begin{pmatrix} x_{i_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A^{\,i_0}X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\mathbb{G} = Vect\left[E_1, \dots, E_{i_0}\right] = \mathbb{F}_{i_0}$$

Or, $X, A\,X, \dots, A^{\,i_0-1}X$ sont dans $\mathbb{F}$ donc :

$$Vect\left[X, A\,X, \dots, A^{\,i_0-1}X\right] \subset \mathbb{F}$$

D'où :

$$\mathbb{F}_{i_0} \subset \mathbb{F}$$

De plus :

$$\forall\, Y \in\ \mathbb{F}, \forall\, i \in [\![1, n]\!] : i > i_0\ \Rightarrow\ Y[i] = 0$$

Donc :

$$\forall\, Y \in \mathbb{F} :\ Y \in Vect\left[E_1, \dots, E_{i_0}\right]$$

Donc :

$$\mathbb{F} \subset \mathbb{F}_{i_0}$$

D'où :

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_{i_0}$$

Application :

Donner les sous espaces stables de dimension 1 et 2 de la matrice nilpotente :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est formée de 2 blocs de Jordan, un premier d'ordre 3 et un second d'ordre 2.

Les sous espaces stables non réduits au vecteur nul s'obtiennent à partir des sous espaces stables associés aux blocs de Jordan, à savoir :

Sous espaces de dimension 1 :

$$Vect\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right], \qquad Vect\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right] \quad Vect\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$$

Sous espaces de dimension 2 :

$$Vect\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right], \qquad Vect\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right], \qquad Vect\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$Vect\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right], \qquad Vect\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right], \qquad Vect\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$$