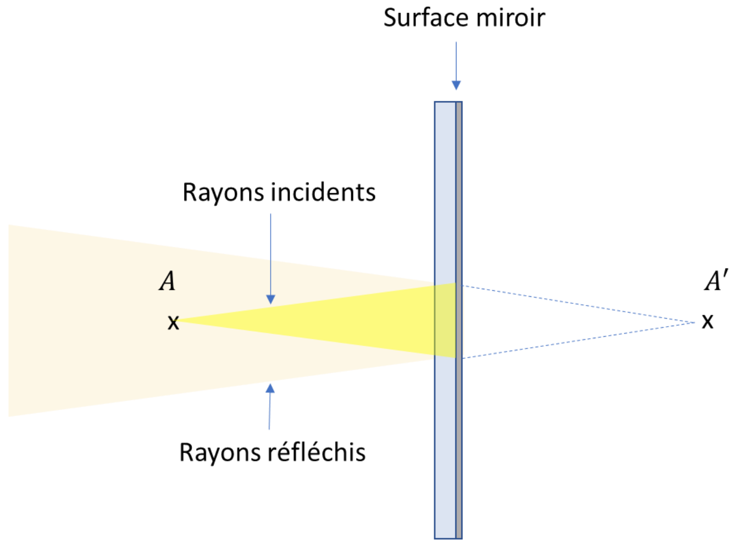
Optique géométrique des miroirs

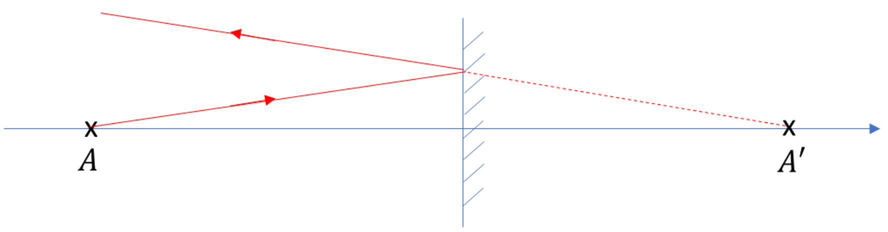
I Les miroirs

a) Le miroir plan

Considérons une source ponctuelle placée en un point A face à un miroir et émettant des rayons dans un cône d'axe perpendiculaire à ce dernier. Le miroir réfléchit les rayons de cône et les rayons réfléchis forment un cône de sommet le point A', qui est le symétrique du point A par rapport au plan du miroir.



On représente cette situation de la façon schématique suivante :



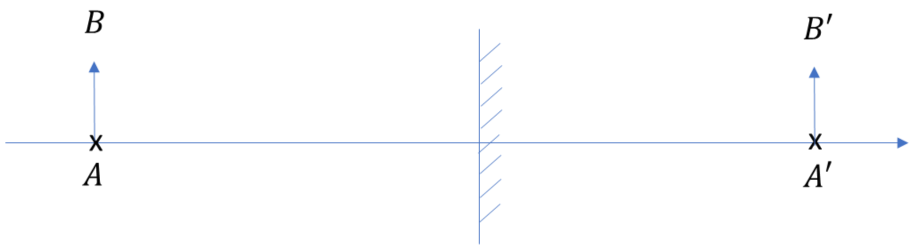
Foyers :

Un faisceau de rayons incidents parallèles génère un faisceau de rayons réfléchis parallèles, donc qui ne converge en aucun point. Un miroir n'a donc pas de foyer image.

Aucun point générant un faisceau de rayons incidents ne génère un faisceau de rayons réfléchis parallèles. Un miroir n'a donc pas de foyer objet.

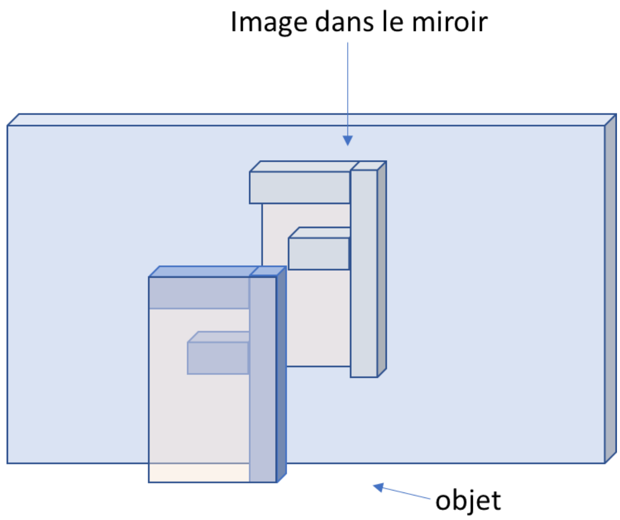
Un miroir plan est donc un système afocal

Grandissement :



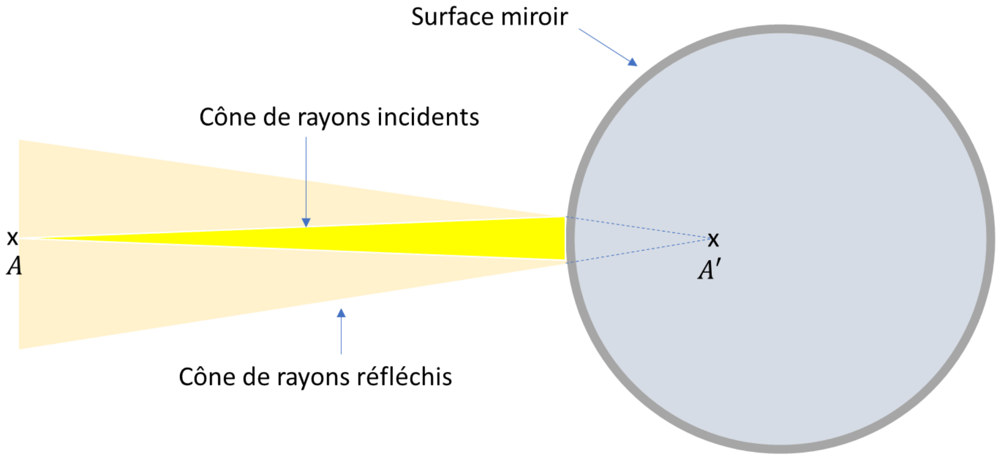
Un miroir donne d'un objet AB source de lumière, une image $A'B'$ droite.

Toutefois, il ne faudrait pas en déduire que l'image est superposable à l'objet. Si vous vous observez dans un miroir, vous constaterez que votre main droite apparait dans l'image renvoyée par le miroir comme une main gauche. Cela vient du fait que le symétrique d'un objet par rapport à un plan n'est pas superposable à cet objet comme l'illustre cet exemple d'une lettre F apposée sur une plaque en verre et dont l'image dans le miroir apparait comme écrite à l'envers.



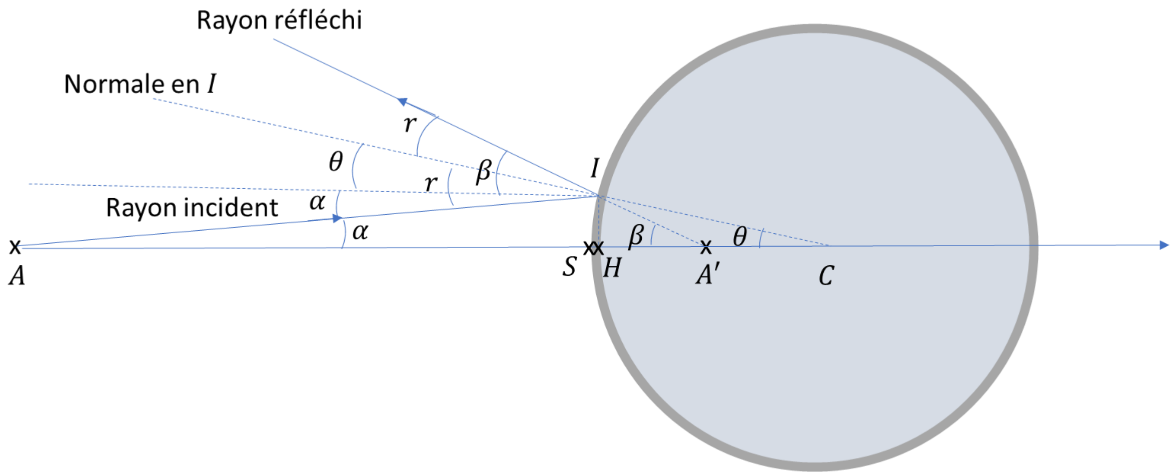
b) Le miroir sphérique

miroir sphérique convexe



soit une source de lumière considérée comme ponctuelle, placée en un point A et émettant un faisceau de lumière dont une partie touche la surface d'un miroir sphérique convexe de centre C et de rayon R à travers un cône de lumière d'axe $(A\ C)$ d'angle α rencontrant la sphère en un point S qu'on appellera sommet de la sphère.

Considérons un rayon quelconque de ce cône et notons I, le point où il se réfléchit sur la sphère et r l'angle que fait ce rayon avec la normale en ce point, θ l'angle $\widehat{SCI}$, β l'angle $\widehat{SA'I}$, A' étant le point d'intersection de la droite contenant le rayon réfléchi avec l'axe du cône. Notons également H le projeté orthogonal de I sur l'axe du cône.



Si l'angle α du cône est petit (inférieur à la dizaine de degrés pour se fixer les idées), on peut faire les approximations suivantes :

$$\alpha \approx Tan(\alpha) = \frac{HI}{AH}$$

$$\beta \approx Tan(\beta) = \frac{HI}{A'H}$$

$$\theta \approx Tan(\theta) = \frac{HI}{CH}$$

Or, les angles vérifient les propriétés géométriques :

$$r = \theta + \alpha$$

$$\beta = \theta + r$$

Soit, en additionnant ces relations :

$$\beta = 2\,\theta + \alpha$$

Et ainsi :

$$\frac{HI}{A'H} = 2\frac{HI}{CH} + \frac{HI}{AH}$$

Soit, en simplifiant :

$$\frac{1}{A'H} = \frac{2}{CH} + \frac{1}{AH}$$

On peut faire encore les approximations suivantes, et :

$$A'H \approx A'S$$

$$AH \approx AS$$

$$CH = CS = R$$

La relation devient :

$$\frac{1}{A'S} - \frac{1}{AS} = \frac{2}{CS}$$

Ou encore, en faisant apparaitre des mesures algébriques, l'axe du cône étant orienté de A vers C :

$$A'S = \overline{SA'}$$

$$AS = \overline{AS} = -\overline{SA}$$

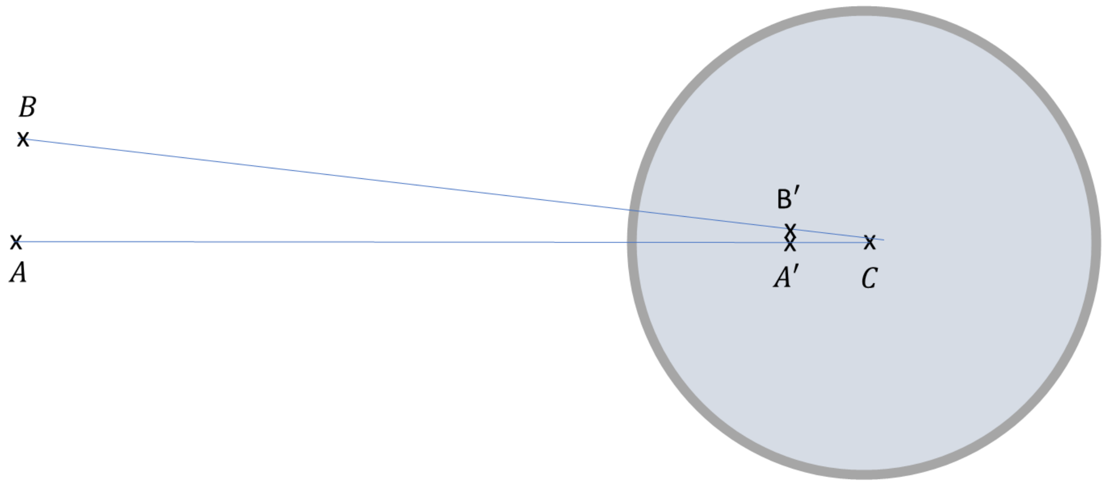
$$CS = \overline{SC}$$

$$\boxed{\frac{\mathbf{1}}{\overline{\boldsymbol{SA'}}} + \frac{\mathbf{1}}{\overline{\boldsymbol{SA}}} = \frac{\mathbf{2}}{\overline{\boldsymbol{SC}}}}$$

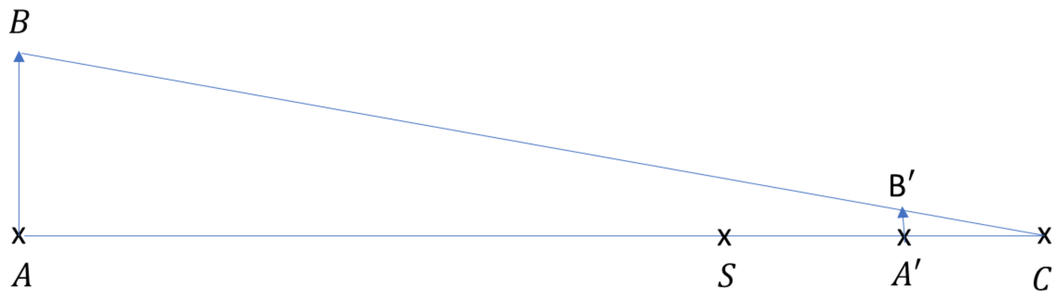
Cette formule, dans laquelle le point A' est appelé **image de $\boldsymbol{A}$** est qualifiée de **relation de conjugaison de Descartes**

Représentation schématique de l'image d'un objet :

Considérons un point B situé sur une sphère de centre C et de rayon CA. Si la distance AB est petite devant le rayon de la sphère, alors le segment $[A, B]$ peut être considéré comme étant perpendiculaire à la droite (AC) et si on introduit le point B' image de B par le miroir, $[A', B']$ peut être considéré comme étant également perpendiculaire à la droite (AC).



On peut alors représenter la situation par un schéma simplifié de ce type :



Grandissement

Le grandissement d'un objet AB est défini comme la quantité (algébrique) :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Dans le cas du miroir sphérique, cela donne, puisque l'image est droite :

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB}$$

En utilisant le théorème de Thalès, puis en prenant S pour origine, on a :

$$\gamma = \frac{CA'}{CA} = \frac{R - SA'}{R + SA}$$

Or, on déduit de la relation de conjugaison :

$$R = \frac{2\,SA \times SA'}{SA - SA'}$$

Ainsi :

$$\gamma = \frac{\dfrac{2\,SA \times SA'}{SA - SA'} - SA'}{\dfrac{2\,SA \times SA'}{SA - SA'} + SA} = \frac{2\,SA \times SA' - SA'(SA - SA')}{2\,SA \times SA' + SA(SA - SA')} = \frac{SA'}{SA}$$

Finalement, le grandissement algébrique a pour expressions :

$$\boxed{\boldsymbol{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}}}$$

Relation de conjugaison avec origine au centre :

Transformons la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{A'S} - \frac{1}{AS} = \frac{2}{CS}$$

$$\frac{1}{R - A'C} - \frac{1}{AC - R} = \frac{2}{R}$$

$$\frac{(AC - R) - (R - A'C)}{(R - A'C)\,(AC - R)} = \frac{2}{R}$$

$$R\,(AC + A'C - 2\,R) = 2\,(R - A'C)\,(AC - R)$$

$$R\,AC + R\,A'C - 2\,R^2 = 2\,R\,AC - 2\,R^2 - 2\,A'C \times AC + 2\,R\,A'C$$

$$2\,A'C \times AC = R\,AC + R\,A'C$$

$$\frac{1}{A'C} + \frac{1}{AC} = \frac{2}{R}$$

Soit avec des mesures algébriques :

$$\boxed{\frac{\mathbf{1}}{\overline{\boldsymbol{CA'}}} + \frac{\mathbf{1}}{\overline{\boldsymbol{CA}}} = \frac{\mathbf{2}}{\overline{\boldsymbol{CS}}}}$$

Foyers image et objet:

Par définition, le foyer image F' est l'image d'un point A situé à l'infini. Le cône de rayon atteignant le miroir est donc un faisceau de rayons parallèles. Pour obtenir la position de ce foyer, il suffit de faire tendre AC vers l'infini dans la relation de conjugaison avec origine au centre et on obtient :

$$\frac{1}{\overline{CF'}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

Soit :

$$\overline{\boldsymbol{CF'}} = \frac{\overline{\boldsymbol{CS}}}{\mathbf{2}}$$

Le foyer image est donc le milieu du segment reliant le centre au sommet du miroir

Le foyer objet F est le point ayant une image à l'infini. Ce foyer est confondu avec le foyer image.

On définit également les distances focales objet et image égales par :

$$\boldsymbol{f} = \overline{\boldsymbol{SF}} = -\overline{\boldsymbol{CF}}$$

$$\boldsymbol{f'} = \overline{\boldsymbol{SF'}}$$

Elles sont, pour un miroir sphérique, égales

Relation de conjugaison de Newton :

Transformons la relation de conjugaison avec origine au centre :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

$$\frac{1}{\overline{CF} + \overline{FA'}} + \frac{1}{\overline{CF} + \overline{FA}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

$$\frac{1}{-f + \overline{FA'}} + \frac{1}{-f + \overline{FA}} = -\frac{1}{f}$$

$$\frac{-2\,f + \overline{FA'} + \overline{FA}}{(-f + \overline{FA'})\,(-f + \overline{FA})} = -\frac{1}{\overline{f}}$$

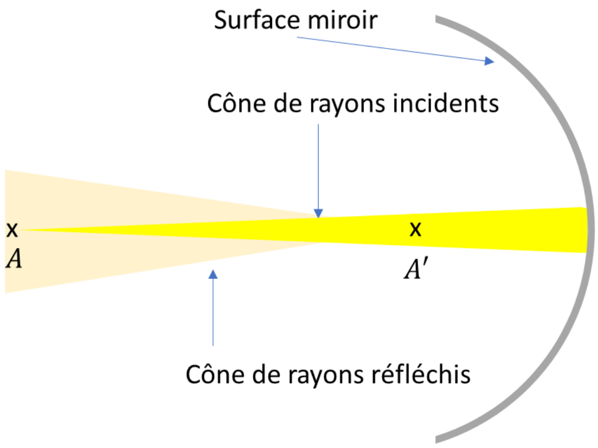
$$(-2\,f + \overline{FA'} + \overline{FA})\,f = -(-f + \overline{FA'})\,(-f + \overline{FA})$$

$$-2\,f^2 + \overline{FA'}\,f + \overline{FA}\,f = -f^2 + \overline{FA'}\,f + \overline{FA}\,f - \overline{FA'}\,\overline{FA}$$

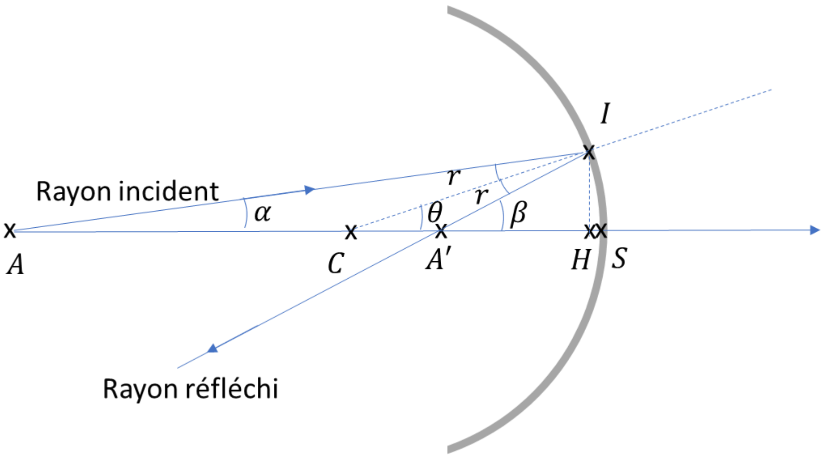
Soit finalement :

$$\boxed{\overline{FA'}\,\overline{FA} = f^2}$$

miroir sphérique concave



Nous reprenons des notations analogues aux précédentes.



En considérant la propriété de la somme des angles égale à 180° dans les triangles ACI puis $A'CI$ les relations angulaires s'écrivent :

$$\theta = \alpha + r$$

$$\beta = \theta + r$$

Soit, en soustrayant ces relations :

$$\beta - \theta = \theta - \alpha$$

D’où :

$$\beta + \alpha = 2\,\theta$$

$$\frac{HI}{A'S} + \frac{HI}{AS} = 2\frac{HI}{CH}$$

Soit, en simplifiant :

$$\frac{1}{A'H} + \frac{1}{AH} = \frac{2}{CH}$$

Et avec les approximations :

$$\frac{1}{A'S} + \frac{1}{AS} = \frac{2}{CS}$$

Et avec les mesures algébriques :

$$\boxed{\frac{\mathbf{1}}{\overline{\boldsymbol{SA'}}} + \frac{\mathbf{1}}{\overline{\boldsymbol{SA}}} = \frac{\mathbf{2}}{\overline{\boldsymbol{SC}}}}$$

Cette formule est donc la même que pour le miroir sphérique convexe.

On peut établir de la même façon toutes les autres formules algébriques, grandissement, relation de conjugaison avec origine au centre, relation de conjugaison de Newton.