Matrices symétriques et formes quadratiques réelles

<u>I Motivation</u> :

Considérons dans un plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M(x,y)$ vérifiant une équation du type :

$$x^2 - 6\,x\,y + \;2\,y^2 = 5$$

Posons :

$$f(x,y) = x^2 - 6\,x\,y + \;2\,y^2$$

f est un polynôme homogène de degré 2 appelé forme quadratique sur les couples de réels. Notons alors, qu'en dédoublant le terme central, nous avons :

$$f(x,y) = x^2 - 3\,x\,y - 3\,x\,y + \;2\,y^2 = x\,(x\;-3\,y) + y\,(-3\,x + 2\,y)$$

Soit , en faisant apparaitre un produit matriciel ligne colonne :

$$f(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} x\;-3\,y \\ -3\,x+2\,y \end{pmatrix}$$

puis un produit matrice colonne :

$$f(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et, en notant que le couple est la transposée de la colonne :

$$f(x,y) = \;{}^t\!\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Notons alors :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

alors :

$$f(x,y) = \;{}^tX\,A\,X$$

où A est une matrice dont les coefficients symétriques par rapport à la diagonale descendante sont égaux.

L'intérêt d'un tel formalisme est, comme nous le verrons plus loin, de pouvoir diagonaliser les matrices symétriques associées dans une base orthonormée, et aboutir dans cette nouvelle base à une expression du type :

$$f(x,y) = a\,x'^2 + b\,y'^2$$

forme à partir de laquelle il sera aisé de reconnaitre la nature des courbes du plan d'équation $f(x,y) = c$ où c est un réel donné.

II Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. On dit que A est symétrique si :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 : \quad a_{ij} = a_{ji}$$

ce qui équivaut à :

$$^{t}A = A$$

c'est-à-dire que la matrice est égale à sa transposée, ce qui revient à dire que la ligne et la colonne de même numéro ont les mêmes termes ou encore que deux termes quelconques symétriques par rapport la diagonale descendante sont égaux.

Exemples de matrices symétriques :

- D'ordre 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- D'ordre 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

III Espace vectoriel des matrices symétriques

Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ mais pas une sous-algèbre. Autrement dit, toute combinaison linéaire de matrices symétriques est une matrice symétrique. En revanche le produit de deux matrices symétriques n'est pas nécessairement une matrice symétrique.

Preuve :

- Sous-espace vectoriel :

Soit $(A,B) \in \left(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})\right)^2, \lambda \in \mathbb{K}$ alors, par propriétés de la transposition :

$$^{t}(A + \lambda\, B) = \ ^{t}A + \lambda\ ^{t}B = A + \lambda\, B$$

Donc $A + \lambda\, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$

- Sous algèbre :

Prenons un contre-exemple simple en prenant une matrice A ayant tous ses termes égaux à 1 et une matrice B diagonale avec le premier terme diagonal égal à 2, les autres étant égaux à 1. Les deux matrices sont symétriques mais leur produit $A\,B$ ne l'est pas car c'est une matrice dont tous les termes sont égaux à 1 à l'exception de la première colonne où ils sont égaux à 2.

L'exemple ci-dessous illustre ce fait pour $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

IV Matrices symétriques réelles

Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice symétrique d'ordre $\boldsymbol{n}$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ alors :

1) Les racines du polynôme caractéristique de $\boldsymbol{A}$ sont réelles

2) Deux vecteurs propres de $\boldsymbol{A}$ associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{col}}$, ce dernier désignant l'espace vectoriel des matrices à $\boldsymbol{n}$ lignes et une colonne et à coefficients dans $\mathbb{R}$.

3) $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable dans une base orthonormale, autrement dit, il existe une matrice $\boldsymbol{P}$ d'ordre $\boldsymbol{n}$ dite unitaire (vérifiant ${}^t\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I_n}$) et une matrice diagonale $\boldsymbol{D}$ telles que :

$$\boldsymbol{P^{-1}\,A\,\;P = \;{}^tP\,A\,\;P = D}$$

Preuves :

1) Soit λ une valeur propre complexe de A et X un vecteur propre complexe non nul associé. Alors :

$$A\,X = \lambda\,X$$

et par conjugaison :

$$A\,\overline{X} = \lambda\,\overline{X}$$

Montrons d'abord que le nombre ${}^tX\,A\,\overline{X}$ est réel en notant :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \ A = (a_{ij})$$

En effet , on a :

$${}^tX\,A\,\overline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,\overline{x_j} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\,\overline{x_j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\,\overline{x_j} \end{pmatrix} = \sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} a_{ij}\,x_i\,\overline{x_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,\;|x_i|^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}\,x_i\,\overline{x_j} + \sum_{1\le j<i\le n} a_{ij}\,x_i\,\overline{x_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \; |x_i|^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} \, x_i \, \overline{x_j} + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ji} \, x_j \, \overline{x_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \; |x_i|^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} \, x_i \, \overline{x_j} + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} \, x_j \, \overline{x_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \; |x_i|^2 + 2 \, Re \left(\sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} \, x_i \, \overline{x_j} \right)$$

donc :

$${}^{t}X \, A \, \bar{X} \in \mathbb{R}$$

Ainsi :

$${}^{t}X \, A \, \bar{X} = \overline{{}^{t}X \, A \, \bar{X}} = {}^{t}\bar{X} \, A \, X$$

Or :

$${}^{t}X \, A \, \bar{X} = {}^{t}X \, \bar{\lambda} \, \bar{X} = \bar{\lambda} \, {}^{t}X \, \bar{X} = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

$${}^{t}\bar{X} A \, X = {}^{t}\bar{X} \, \lambda \, X = \lambda \; {}^{t}\bar{X} \, X = \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

Donc :

$$\bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

Or :

$$X \neq 0 \Rightarrow \; \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0$$

Donc :

$$\bar{\lambda} = \lambda$$

Et :

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

2) Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de A et X_1 et X_2 deux vecteurs propres respectifs non nuls associés. Alors :

$$A \, X_1 = \lambda_1 \, X_1 \;\; , \;\; A \, X_2 = \lambda_2 \, X_2$$

D'autre part , par transposition :

$${}^{t}X_1 \, A \, X_2 = {}^{t}X_2 \, A \, X_1$$

Donc :

$${}^{t}X_1 \, \lambda_2 \, X_2 = {}^{t}X_2 \, \lambda_1 \, X_1$$

Soit :

$$\lambda_2 \ {}^tX_1X_2 = \lambda_1 \ {}^tX_2\,X_1$$

Or :

$${}^tX_2\,X_1 = {}^tX_1X_2$$

Donc :

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \ {}^tX_1X_2 = 0$$

D'où :

$${}^tX_1X_2 = 0$$

Ce qui traduit l'orthogonalité des colonnes X_1et X_2

3) Montrons la propriété par récurrence forte. L'initialisation $(n = 1)$ étant triviale. Supposons donc la propriété vraie pour toutes les matrices symétriques réelles d'ordre $p \leq n$. Soit alors une matrice symétrique réelle A d'ordre $n + 1$. Cette matrice possède au moins une valeur propre λ_1. Notons n_1 la dimension du sous espace propre $\mathbb{E}_{\lambda_1}$ associé.

Si $n_1 = n + 1$ alors A est diagonalisable et par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on peut construire une base orthonormée de $\mathbb{E}_{\lambda_1}$

Si $n_1 < n + 1$, on peut construire une base orthonormée de $\mathbb{E}_{\lambda_1}$ par le même procédé. Notons là $(P_1, P_2, \dots, P_{n_1})$ et complétons cette base en une base de $\mathbb{R}^{n+1}_{col}$ $(P_1, P_2, \dots, P_{n_1}, P_{n_{1+1}}, \dots P_{n+1})$ qui soit orthonormée. Formons la matrice inversible P dont les colonnes sont les P_i et qui n'est autre que la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n_{col}$ à la base $(P_1, P_2, \dots, P_{n_1}, P_{n_{1+1}}, \dots P_{n+1})$. Cette matrice vérifie :

$${}^tP\,P = I_n$$

donc :

$${}^tP = P^{-1}$$

et au passage :

$$P \ {}^tP = I_n$$

et donc la matrice $P^{-1}\ A\ \ P$ a la forme par blocs :

$$P^{-1}\,A\ \ P = {}^tP\,A\,P = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & B' & \\ & & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & A' & \\ & & \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

Or A étant symétrique, la matrice ${}^tP\,A\,P$ l'est aussi car :

$${}^t\left({}^tP\,A\,P\right) = {}^tP\,A\ {}^t\left({}^tP\right) = {}^tP\,A\,P$$

On en déduit que B' a tous ses termes nuls et que A' est symétrique réelle d'ordre $n+1-n_1$. On peut donc appliquer à A' l'hypothèse de récurrence. Il existe une matrice P' unitaire telle que :

$$P'^{-1}\, A'\, P' = \ {}^tP'\, A' P' = D'$$

Où D' est une matrice diagonale d'ordre $n+1-n_1$. Formons alors la matrice Q d'ordre $n+1$ par bloc comme suit :

$$Q = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & P' & \\ & & \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

alors

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & P'^{-1} & \\ & & \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & {}^tP' & \\ & & \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \ {}^tQ$$

Donc Q est unitaire et :

$$P^{-1} A\, P = Q^{-1} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & B' & \\ & & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & D' & \\ & & \end{bmatrix} \end{pmatrix} Q$$

Notons :

$$D = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & D' & \\ & & \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

Alors D est diagonale et :

$$Q\, P^{-1} A\, P\, Q^{-1} = D$$

Posons :

$$R = P\, Q^{-1} = P\ {}^tQ$$

Alors :

$$R\ \ {}^tR = P\ {}^tQ\ Q\ \ {}^tP = P\, I_{n+1}\ \ {}^tP = P\ {}^tP = I_{n+1}$$

Donc R est unitaire et :

$$R^{-1} A R = {}^tR A R = D$$

A est donc diagonalisable dans une base orthonormale

V Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques réelles

On note $\mathbb{R}^n_{col}$ l'espace vectoriel formé par les matrices colonne à n termes réels.

1) Formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^n_{col}$

a) définition :

Une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n_{col}$ est une application φ de $\mathbb{R}^n_{col} \times \mathbb{R}^n_{col}$ dans $\mathbb{R}$ qui est :

- Bilinéaire : Pour tout Y de $\mathbb{R}^n_{col}$ l'application partielle $\varphi(.,Y) : X \to \varphi(X,Y)$ est linéaire et pour tout X de $\mathbb{R}^n_{col}$ l'application partielle $\varphi(X,.) : Y \to \varphi(X,Y)$ est linéaire.
- Symétrique : $\forall\ (X,Y) \in (\mathbb{R}^n_{col})^2 :\ \varphi(X,Y) = \varphi(Y,X)$

b) Expression générale :

φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n_{col}$ si et seulement si il existe une matrice symétrique réelle telle que :

$$\forall\ (\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \in (\mathbb{R}^n_{col})^2 :\ \boldsymbol{\varphi(X,Y)} = {}^t\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Y}$$

Preuve :

$(\Rightarrow)$ Soit φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n_{col}$ et $(X,Y) \in (\mathbb{R}^n_{col})^2$. Posons :

$${}^tX = (x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad {}^tY = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Et notons $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n_{col}$

Alors, en développant par bilinéarité :

$$\varphi(X,Y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, E_i\,, \sum_{j=1}^{n} y_j\, E_j\right) = \sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \varphi(E_i, E_j)\, x_i\, y_j = {}^tX\, A\, Y$$

en désignant par A la matrice symétrique dont le terme à l'intersection de la ligne i et la colonne j est $\varphi(E_i, E_j)$

$(\Leftarrow)$ Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n et φ définie sur $\mathbb{R}^n_{col} \times \mathbb{R}^n_{col}$ par :

$$\varphi(X,Y) = {}^tX\, A\, Y$$

Alors :

$$\varphi(Y,X) = {}^tY\,A\,X = {}^t\left({}^tY\,A\,X\right) = {}^tX\ {}^tA\ {}^t\left({}^tY\right) = {}^tX\,A\,Y$$

Donc φ est symétrique

De plus pour $Y \in \mathbb{R}^n_{col}$, $(X,X') \in (\mathbb{R}^n_{col})^2, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(X + \lambda\,X', Y) = {}^t(X + \lambda\,X)'\,A\,Y = {}^tX\,A\,Y + \lambda\ {}^tX'\,A\,Y = \varphi(X,Y) + \lambda\,\varphi(X',Y)$$

$$\varphi(Y, X + \lambda\,X') = \varphi(X + \lambda\,X', Y) = \varphi(X,Y) + \lambda\,\varphi(X',Y) = \varphi(Y,X) + \lambda\,\varphi(Y,X')$$

Donc φ est linéaire par rapport à sa première et sa deuxième variable.

2) Formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n_{col}$

a) définition :

Une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n_{col}$ est une application f de $\mathbb{R}^n_{col}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique φ sur $\mathbb{R}^n_{col}$ telle que :

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n_{col} :\ f(X) = \varphi(X,X)$$

b) Expression générale :

Une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n_{col}$ est une application f de $\mathbb{R}^n_{col}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une matrice symétrique réelle d'ordre n telle que :

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n_{col} :\ f(X) = {}^tX\,A\,X$$

Soit, en notant : ${}^tX = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $A = \left(a_{ij}\right)$:

$$f(X) = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} a_{ij}\,x_i\,x_j$$

La matrice A est définie de manière unique

Preuve de l'unicité :

Soit $A = \left(a_{ij}\right), B = \left(b_{ij}\right)$ telles que :

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n_{col} :\ {}^tX\,A\,X = {}^tX\,B\,X$$

Alors en prenant X ayant tout ses termes nuls sauf le i-ème et le -j-ème égaux à 1,l'égalité donne :

$$a_{ij} + a_{ji} = b_{ij} + b_{ji}$$

qui donne, compte tenu de $a_{ji} = a_{ij}$:

$$a_{ij} = b_{ij}$$

Et en prenant X ayant tout ses termes nuls sauf le i-ème égal à 1 :

$$a_{ii} = b_{ii}$$

b) Réduction d'une forme quadratique réelle en base orthonormée

Soit f une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n_{col}$ de matrice A donc telle que :

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n_{col} :\ f(X) = {}^tX\, A\, X$$

Alors, il une existe une base orthonormée de matrice de passage unitaire P et une matrice diagonale D telle que :

$$A = P\, D\, P^{-1} = P\, D\ {}^tP$$

Donc :

$$f(X) = {}^tX\, P\, D\ {}^tP\, X$$

Posons :

$$Y = P^{-1}\, X = {}^tP\, X$$

Y désigne le vecteur colonne des coordonnées de X dans la base orthonormée de matrice de passage P. Alors :

$$f(X) = {}^tY\, D\, Y$$

Soit en notant :

$${}^tY = (y_1, y_2, \dots, y_n)\ , D = diagonale(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} d_i\, {y_i}^2$$

En posant :

$$g(Y) = {}^tY\, D\, Y$$

g est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n_{col}$ de matrice diagonale. Ainsi peut être plus facilement identifiée la nature des ensembles de points d'un espace affine dont les colonnes coordonnées en repère orthonormé X vérifient :

$${}^tX\, A\, X = c$$

où c est un réel donné.

En effet, ce sont les ensembles de point dont les colonnes coordonnées Y dans un repère orthonormé de vecteurs propres de A vérifient une relation de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} d_i\, {y_i}^2 = c$$

Or ces ensembles sont facilement identifiables dans le cas $n=2$, ce sont soit des coniques soit, des droites, des points ou l'ensemble vide, ainsi que dans le cas $n=3$.

VI Application à la reconnaissance des côniques dans un plan

On considère les courbes $\mathcal{C}$ d'un plan vérifiant dans un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$de ce plan une équation de la forme :

$$f(x,y)=a\,x^2+2\,b\,x\,y+c\,y^2+d\,x+e\,y+f=0$$

où a,b,c,d,e,f sont des réels donnés.

Pour déterminer la nature de cet ensemble, on procède par étape :

On cherche d'abord à se ramener par translation dans le plan à une forme sans termes du premier degré. Pour cela, on définit la translation par un changement de coordonnées de la forme :

$$x'=x-x_0,\qquad y'=y-y_0$$

Et on reporte dans l'expression :

$$f(x,y)=a\,(x'+x_0)^2+2\,b\,(x'+x_0)\,(y'+y_0)+c\,(y'+y_0)^2+d\,(x'+x_0)+e\,(y'+y_0)+f$$

Ce qui aboutit à une forme :

$$f(x,y)=a\,x'^2+2\,b\,x'y'+c\,y'^2+(2\,a\,x_0+2\,b\,y_0+d)\,x'+(2\,b\,x_0+2\,c\,y_0+e)\,y'+f'$$

On choisit alors le couple (x_0,v) comme solution du système :

$$\begin{cases}2\,a\,x_0+2\,b\,y_0+d=0\\2\,b\,x_0+2\,c\,y_0+e=0\end{cases}$$

A noter, de façon pratique, que ce système s'écrit également :

$$\begin{cases}f'_x(x_0,y_0)=0\\f'_y(x_0,y_0)=0\end{cases}$$

Ce système a pour déterminant :

$$2\,(ac-b^2)$$

On distingue alors 2 cas :

1er cas : $b^2-a\,c\neq 0$

Le système précédent admet un couple de solutions unique (x_0,y_0) et le système

$$\begin{cases}x'=x-x_0\\y'=y-y_0\end{cases}$$

définit un changement de repère par translation dans lequel la nouvelle origine Ω a pour coordonnées (x_0,y_0) dans le repère initial. Dans ce nouveau repère $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la courbe $\mathcal{C}$ a une équation de la forme :

$$a\,x'^2+2\,b\,x'y'+c\,y'^2+f'=0$$

On introduit la forme quadratique :

$$g\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = a\,x'^2 + 2\,b\,x'y' + c\,y'^2$$

de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

On diagonalise A en déterminant une matrice unitaire P et une matrice diagonale D telle que :

$$P^{-1}\,A\,P = {}^tP\,A\,P = D$$

Les colonnes de P fournissent alors une nouvelle base orthonormale $(\vec{I}, \vec{J})$:

$$\vec{I} = p_{11}\,\vec{\imath} + p_{21}\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{J} = p_{12}\,\vec{\imath} + p_{22}\,\vec{\jmath}$$

Dans le repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ la courbe $\mathcal{C}$ a une équation de la forme :

$$d_1\,x''^2 + d_2\,y''^2 + f' = 0$$

Où d_1, d_2 sont les éléments diagonaux de D.

On peut alors déterminer la nature de $\mathcal{C}$ selon les cas suivants :

1er sous-cas : <u>$\boldsymbol{d_1}$ et $\boldsymbol{d_2}$ de même signe et non nuls</u> :

$\mathcal{C}$ est vide si f' a le même signe que d_1, composé de deux droites si f' est nul et est une ellipse dans les autres cas, car on peut mettre l'équation sous forme :

$$\frac{x''^2}{A^2} + \frac{y''^2}{B^2} = 1$$

2ème sous-cas <u>$\boldsymbol{d_1}$ et $\boldsymbol{d_2}$ de signes contraires et non nuls</u> :

$\mathcal{C}$ est composé de deux droites si f' est nul et est une hyperbole dans les autres cas, car on peut mettre l'équation sous forme :

$$\frac{x''^2}{A^2} - \frac{y''^2}{B^2} = 1$$

<u>2ème cas : $\boldsymbol{b^2 - a\,c = 0}$</u>

Le système n'ayant pas nécessairement de solutions, on abandonne le changement de repère par translation et on note que si $a \neq 0$:

$$f(x, y) = a\left(x + \frac{b}{a}\,y\right)^2 + d\,x + e\,y + f$$

Introduisons alors un réel u, pour l'instant quelconque, de la sorte :

$$f(x, y) = a\left(x + \frac{b}{a}\,y + u\right)^2 - 2\,a\,u\left(x + \frac{b}{a}\,y\right) - a\,u^2 + d\,x + e\,y + f$$

$$= a\left(x + \frac{b}{a}\,y + u\right)^2 + (d - 2\,a\,u)\,x + (e - 2\,a\,b)\,y + f - a\,u^2$$

On cherche alors un changement de repère orthonormé de la forme :

$$\begin{cases} x' = \lambda\left(x + \dfrac{b}{a}\,y + u\right) \\ y' = \mu\left((d - 2\,a\,u)\,x + (e - 2\,a\,b)\,y + f - a\,u^2\right) \end{cases}$$

Faisons alors un petit point sur les changements de repère orthonormés.

Soit M un point d'un plan ayant pour couple de coordonnées (x', y') dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et (x, y) dans un repère orthonormé $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ de même orientation. Alors en notant P la matrice de passage de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$ et (x_0, y_0) le couple de coordonnées de Ω dans $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ nous avons :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$$

Soit :

$$x\,\vec{\imath} + \;y\,\vec{\jmath} = x_0\,\vec{\imath} + \;y_0\,\vec{\jmath} + x'\vec{I} + y'\vec{J}$$

donc :

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tP\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

en ayant posé :

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = {}^tP\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, étant donné un système de la forme :

$$\begin{cases} x' = a\,x + b\,y + e \\ y' = c\,x + d\,y + f \end{cases}$$

Ce système définit un changement de repère orthonormé de même orientation si et seulement si la matrice suivante est unitaire et de déterminant strictement positif (donc égal à 1 pour une telle matrice unitaire) :

$$P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

C’est-à-dire, que les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} a\,c + b\,d = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ \det(P) > 0 \end{cases}$$

Auquel cas les coordonnées de la nouvelle origine Ω s’obtiennent en calculant :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -e \\ -f \end{pmatrix}$$

Revenant à notre problème de départ, la matrice P est :

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & \mu\,(d - 2\,a\,u) \\ \lambda\,\dfrac{b}{a} & \mu\,(e - 2\,a\,b) \end{pmatrix}$$

Les conditions sont donc :

$$\begin{cases} \lambda\,\mu\,(d - 2\,a\,u) + \lambda\,\mu\,\dfrac{b}{a}(e - 2\,a\,b) = 0 \\ \lambda^2\left(1 + \dfrac{b^2}{a^2}\right) = 1 \\ \mu^2(\,(d - 2\,a\,u)^2 + (e - 2\,a\,b)^2) = 1 \\ \det(P) > 0 \end{cases}$$

λ et μ étant choisis non nuls ce système équivaut à

$$\begin{cases} d - 2\,a\,u + \dfrac{b}{a}(e - 2\,a\,b) = 0 \\ \lambda^2\left(1 + \dfrac{b^2}{a^2}\right) = 1 \\ \mu^2(\,(d - 2\,a\,u)^2 + (e - 2\,a\,b)^2) = 1 \\ \det(P) > 0 \end{cases}$$

et conduit à une valeur unique de u et à deux choix possibles pour le couple (λ, μ) pour obtenir un déterminant strictement positif.

Dans le nouveau repère, la courbe aura une équation de la forme :

$$y' = a'x'^2$$

qui est l’équation d’une parabole.

si $a = 0$ on travaille de façon analogue en notant que :

$$f(x, y) = c\,\left(x + \frac{b}{c}\,y\right)^2 + d\,x + e\,y + f$$

et on obtiendra encore une parabole