Matrices orthogonales

Dans toute la suite, les matrices considérées seront à termes dans le corps $\mathbb{R}$. On notera $\mathbb{R}^n_{col}$ l'ensemble des vecteurs colonnes à n termes dans $\mathbb{R}$.

I Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On dit que A est orthogonale si ses colonnes forment une base orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n_{col}$ ce qui équivaut à :

$$\boldsymbol{{}^tA\ A = I_n}$$

Ou encore à A inversible et :

$$\boldsymbol{A^{-1} = {}^tA}$$

Exemples : Les matrices de permutation :

Ce sont des matrices qui ont leurs termes nuls sauf un dans chaque colonne qui vaut 1, sachant qu'il n'y a qu'un seul 1 sur chaque ligne comme dans cet exemple :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A noter leur effet sur une matrice de même ordre qui est de permuter les colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{pmatrix}$$

ou les lignes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

selon qu'on les multiplie à gauche ou à droite.

II Déterminant d'une matrice orthogonale :

Si A est orthogonale alors :

$$\boldsymbol{det(A) = 1 \text{ ou } det(A) = -1}$$

Mais la réciproque est fausse.

Preuve :

Si A est orthogonale alors :

$${}^tA\ A = I_n$$

donc :

$$det({}^tA\ \ A) = 1$$

Donc :

$$det({}^tA)\ \ det(A) = 1$$

Soit :

$$\left(det(A)\right)^2 = 1$$

D'où :

$$det(A) = 1 \text{ ou } det(A) = -1$$

Pour la réciproque, considérons les matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A et B ne sont pas orthogonale et le déterminant de A vaut 1,celui de B vaut -1

III Caractérisation d'une matrice orthogonale

Pour une matrice réelle A, en notant :

$$\langle \boldsymbol{X} | \boldsymbol{Y} \rangle = {}^t\boldsymbol{X}\ \ \boldsymbol{Y}$$

$$\| \boldsymbol{X} \| = \sqrt{\langle \boldsymbol{X} | \boldsymbol{X} \rangle}$$

il y a équivalence entre les assertions suivantes :

1) A est orthogonale

2) A conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall\ (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in {\mathbb{R}^n_{col}}^2 : \langle \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} | \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Y} \rangle = \langle \boldsymbol{X} | \boldsymbol{Y} \rangle$$

3) A conserve la norme, c'est-à-dire :

$$\forall\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n_{col} :\ \| \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} \| = \| \boldsymbol{X} \|$$

4) A transforme une base orthonormale en une base orthonormale, c'est-à-dire, si $(\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, \dots, \boldsymbol{P_n})$ est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n_{col}$ alors $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P_2}, \dots, \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P_n})$ est une base orthonormale, pour ce même produit scalaire.

Preuves :

1) $\Rightarrow$ 2) Supposons A orthogonale. Soit $(X, Y) \in {\mathbb{R}^n_{col}}^2$ alors :

$$\langle A\,X | A\,Y \rangle = {}^t(A\,X)\ (A\,Y) = {}^tX\ {}^tA\,A\,Y = {}^tX\ I_n\ Y = {}^tX\ \ Y = \langle X | Y \rangle$$

2) $\Rightarrow$ 3) Evident

3) $\Rightarrow$ 2) On suppose

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n_{col} :\ \|A\,X\| = \|X\|$$

Notons alors en développant, que pour tout $(X,Y) \in {\mathbb{R}^n_{col}}^2$:

$$\|X+Y\|^2 = \langle X+Y|X+Y\rangle = \|X\|^2 + 2\,\langle X|Y\rangle + \|Y\|^2$$

Ainsi :

$$\langle X|Y\rangle = \frac{1}{2}\,(\|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2)$$

Et :

$$\langle A\,X|A\,Y\rangle = \frac{1}{2}\,(\|A\,X + A\,Y\|^2 - \|A\,X\|^2 - \|A\,Y\|^2) = \frac{1}{2}\,(\|A\,(X+Y)\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2)$$

$$= \frac{1}{2}\,(\|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2) = \langle X|Y\rangle$$

2) $\Rightarrow$ 1) Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ les colonnes de A et $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n_{col}$. Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\langle A_i|A_j\rangle = \langle A\,E_i|A\,E_j\rangle = \langle E_i|E_j\rangle = \delta_{ij}$$

Donc A est une matrice orthogonale.

2) $\Rightarrow$ 4) Soit $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ une base orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n_{col}$. Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\langle A\,P_i|A\,P_j\rangle = \langle P_i|P_j\rangle = \delta_{ij}$$

Donc $(A\,P_1, A\,P_2, \dots, A\,P_n)$ est une base orthonormale pour le même produit scalaire.

4) $\Rightarrow$ 1) la base canonique de $\mathbb{R}^n_{col}$ $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ étant orthogonale pour le produit scalaire canonique, $(A\,E_1, A\,E_2, \dots, A\,E_n) = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ est une base orthogonale pour ce même produit.

Donc A est une matrice orthogonale.

<u>**IV Matrices orthogonales d'ordre 2**</u>

Soit A une matrice carrée d'ordre 2. Posons :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors A est orthogonale si et seulement si :

$$\begin{cases} a\,b + c\,d = 0 \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Ce qui équivaut à :

$$\exists\ (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} cos(\theta)\ \ cos(\theta') + sin(\theta)\ sin(\theta') = 0 \\ a = cos(\theta) \\ c = sin(\theta) \\ b = cos(\theta') \\ d = sin(\theta') \end{cases}$$

Or :

$$cos(\theta)\ \ cos(\theta') + sin(\theta)\ sin(\theta') = 0 \Leftrightarrow\ cos(\theta' - \theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \exists\ k \in \mathbb{Z} :\ \theta' = \theta + \frac{\pi}{2} +\ k\,\pi$$

Donc le système précédent équivaut à :

$$\exists\ (\theta,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} : \begin{cases} a = cos(\theta) \\ c = sin(\theta) \\ b = cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} +\ k\,\pi\right) \\ d = sin\left(\theta + \frac{\pi}{2} +\ k\,\pi\right) \end{cases}$$

Ce qui équivaut à :

$$\exists\ (\theta,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} : \begin{cases} a = cos(\theta) \\ c = sin(\theta) \\ b = (-1)^{k+1}\ sin(\theta) \\ d = (-1)^{k} cos(\theta) \end{cases}$$

Il y a donc deux familles de matrices orthogonales :

Première famille :

$$A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ce sont les matrices de rotation. Elles ont pour déterminant 1.

Plus précisément, si X est la colonne des coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ du plan dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orientant ce plan, alors $A\ X$ est la colonne des coordonnées du vecteur $\vec{v}$ de même norme que $\vec{u}$ et tel qu'une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ soit θ. Autrement dit $\vec{v}$ est l'image de $\vec{u}$ par la rotation d'angle θ.

Seconde famille :

$$A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ce sont des matrices de symétrie car $A^2 = I_2$. Elles ont pour déterminant (-1).

On peut caractériser ces symétries dans les cas non triviaux où $sin(\theta) = 0$ en déterminant les sous espaces propres :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in ker(A - I_2) \Leftrightarrow (\ cos(\theta) - 1)\ x + sin(\theta)\ y = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right) sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\ x + 2\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right) cos\left(\frac{\theta}{2}\right) y = 0$$

$$\Leftrightarrow -sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\ x + cos\left(\frac{\theta}{2}\right) y = 0$$

$$ker(A - I_2) = Vect\left[\begin{pmatrix} cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}\right]$$

La symétrie étant orthogonale :

$$ker(A + I_2) = Vect\left[\begin{pmatrix} -sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}\right]$$

V Décomposition d'une matrice orthogonale en blocs diagonaux d'ordre inférieur ou égal à 2

a) Préliminaire : valeurs propres complexes d'une matrice orthogonale

Soit A une matrice orthogonale d'ordre n. Considérons cette matrice comme à termes complexes. Soit λ une valeur propre complexe de A et X un vecteur propre complexe non nul associé. Alors :

$$A\,X = \lambda\,X$$

Donc, en prenant le conjugué :

$$A\,\bar{X} = \bar{\lambda}\,\bar{X}$$

Soit :

$$\lambda\,\bar{\lambda}\ {}^tX\,\bar{X} = {}^t(\lambda\,X)\,\left(\bar{\lambda}\,\bar{X}\right) = {}^t(A\,X)\,(A\,\bar{X}) = {}^tX\,{}^tA\,A\,\bar{X} = {}^tX\,I_n\,\bar{X} = {}^tX\,\bar{X}$$

Or :

$${}^tX\,\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0$$

Donc :

$$\lambda\,\bar{\lambda} = 1$$

D'où :

$$\exists\,\theta \in \mathbb{R} :\ \lambda = e^{i\,\theta}$$

Les valeurs propres complexes d'une matrice orthogonale sont de module 1. A noter qu'une matrice orthogonale fait partie de la classe des matrices complexes qualifiées d'unitaires c'est-à-dire vérifiant :

$$\boldsymbol{{}^t\overline{A}\, A = I_n}$$

autrement dit, les matrices dont l'inverse est leur transconjuguée.

b) Plan stable

Exemple 1 : Considérons la matrice orthogonale suivante pour $sin(\theta) \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors, cette matrice a deux valeurs propres réelles 1 et -1 dont les sous espaces propres sont de dimension 1 et ses deux premières colonnes engendrent un plan stable sans vecteur propre non nul.

Exemple 2 : Considérons la matrice orthogonale suivante pour $sin(\theta) \neq 0, sin(\theta') \neq 0$:

$$B = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos(\theta') & -sin(\theta') \\ 0 & 0 & sin(\theta') & cos(\theta') \end{pmatrix}$$

Alors, cette matrice n'a pas de valeurs propres réelles et ses deux premières colonnes engendrent un plan stable sans vecteur propre non nul tout comme ses deux colonnes suivantes. A noter que les valeurs propres complexes de cette matrice sont $e^{i\,\theta}, e^{-i\,\theta}, e^{i\,\theta'}, e^{-i\,\theta'}$.

Voyons la généralité dans cette propriété :

Toute matrice orthogonale d'ordre supérieur ou égal à deux possède au moins un plan stable.

Preuve :

Soit A une matrice orthogonale d'ordre n. Si la dimension de la somme des sous espaces propres associés à 1 et -1 est supérieur ou égal à deux, c'est trivial. Dans l'autre cas, considérons cette matrice comme à termes complexes. Soit λ une valeur propre complexe de A et non réelle et X un vecteur propre non nul complexe associé. Alors :

$$\exists\, \theta \in \mathbb{R} :\ \lambda = e^{i\,\theta}$$

Et :

$$A\,X = e^{i\,\theta}\,X$$

Notons :

$$X_1 = Re(X) = \frac{1}{2}(X + \bar{X}), \qquad X_2 = Im(X) = \frac{1}{2\,i}(X - \bar{X})$$

Alors :

$$X = X_1 + i\, X_2$$

$$\bar{X} = X_1 - i\, X_2$$

Donc :

$$A\,(X_1 + i\, X_2) = e^{i\,\theta}\,(X_1 + i\, X_2)$$

Soit :

$$A\, X_1 + i\, A\, X_2 = \ cos(\theta)\, X_1 - sin(\theta)\, X_2 + i\,(\, sin(\theta)\, X_1 + cos(\theta)\, X_2)$$

Et, en identifiant parties réelles et imaginaires :

$$A\, X_1 = cos(\theta)\, X_1 - sin(\theta)\, X_2$$

$$A\, X_2 = sin(\theta)\, X_1 + cos(\theta)\, X_2$$

Formons alors le sous espace suivant :

$$\mathbb{F} = Vect[X_1, X_2]$$

Montrons que le couple (X_1, X_2) est libre. Supposons pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\alpha\, X_1 + \ \beta\, X_2 = 0$$

Alors :

$$\alpha\, \frac{1}{2}(X + \bar{X}) + \ \beta\, \frac{1}{2\, i}(X - \bar{X}) = 0$$

$$\alpha\,(X + \bar{X}) - i\, \beta\,(X - \bar{X}) = 0$$

$$(\alpha - i\, \beta)\, X + (\alpha - i\, \beta)\, \bar{X} = 0$$

Or les deux vecteurs propres complexes X et $\bar{X}$ étant associés à deux valeurs propres complexes distinctes, ils forment un système libre, donc :

$$\alpha - i\, \beta = \alpha + i\, \beta = 0$$

D'où :

$$\alpha = \ \beta = 0$$

Donc $\mathbb{F}$ est un plan stable par A.

c) Stabilité de l'orthogonal d'un sous espace stable.

Si A est une matrice orthogonale d'ordre n et $\mathbb{V}$ un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n_{col}$ stable par A alors l'orthogonal de $\mathbb{V}$ est stable par A.

Preuve :

Soit $X \in \mathbb{V}^\perp$ et $Y \in \mathbb{V}$. Alors :

$$^tX\, Y = 0$$

Et :

$$^{t}(A\,X)\,Y = {}^{t}X\,{}^{t}A\,Y = {}^{t}X\,(A^{-1}\,Y)$$

Or $\mathbb{V}$ est stable par A donc :

$$A\,\mathbb{V} \subset \mathbb{V}$$

Mais comme A est inversible :

$$dim(A\,\mathbb{V}) = dim(\mathbb{V})$$

Donc :

$$A\,\mathbb{V} = \mathbb{V}$$

Et donc :

$$A^{-1}\,\mathbb{V} = \mathbb{V}$$

$\mathbb{V}$ est donc stable par A^{-1}. Ainsi :

$$A^{-1}\,Y \in \mathbb{V}$$

Et :

$$^{t}X\,(A^{-1}\,Y) = 0$$

donc :

$$A\,X \in \mathbb{V}^{\perp}$$

$\mathbb{V}^{\perp}$ est donc stable par A.

d) Décomposition par blocs d'ordre inférieur ou égal à deux d'une matrice orthogonale.

Si A est une matrice orthogonale d'ordre $n \geq 2$. Alors, il existe une matrice orthogonale P telle que :

$$\boldsymbol{A = P\,A'P^{-1}}$$

Où A' est une matrices formée éventuellement d'un sous-bloc diagonal I_r, d'un sous-bloc diagonal $-I_s$ et de sous-blocs diagonaux d'ordre 2 de la forme :

$$\boldsymbol{R_\theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}}$$

Preuve : Commençons par démontrer par récurrence sur n la propriété suivante :

Si A est orthogonale d'ordre n sans valeur propre réelle alors A est semblable à une matrice formée de sous-blocs diagonaux de la forme R_θ.

Initialisation : Pour $n = 2$, nous avons vu précédemment que si A n'a pas de valeur propre réelle, elle est semblable à une matrice de rotation de la forme R_θ.

Hérédité : Supposons la propriété établie jusqu'à l'ordre $n-1$ pour $n \geq 3$. Alors, il existe un plan $\mathbb{F}$ stable par A et donc son orthogonal est également stable par A. En prenant une base orthonormale (Q_1, Q_2) de $\mathbb{F}$ et une base orthonormale de $(Q_3, \dots, Q_n)$ de son orthogonal, on obtient une base orthonormale de $\mathbb{R}^n_{col}$. On a alors, en formant une matrice orthogonale avec les colonnes de cette base :

$$A\,Q = Q\,A''$$

où A'' est de la forme par blocs :

$$A'' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

B étant d'ordre 2 et C d'ordre $n-2$.

Or d'une part :

$$^tA''\,A'' = \begin{pmatrix} ^tB\,B & 0 \\ 0 & ^tC\,C \end{pmatrix}$$

D'autre part :

$$^tA''\,A'' = {}^t(^tQ\,A\,Q)\,(^tQ\,A\,Q) = {}^tQ\,{}^tA\,Q\,{}^tQ\,A\,Q = I_n$$

<u>Remarque 1</u> : On notera par cette démarche qu'une matrice orthogonalement semblable à une matrice orthogonale est également orthogonale.

Ainsi B et C sont également orthogonales.

<u>Remarque 2</u> : On notera qu'un matrice définie par des blocs diagonaux est orthogonale si et seulement si chacun de ses blocs diagonaux est une matrice orthogonale.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à B et C et obtenir :

$$A'' = \begin{pmatrix} R\,B'R^{-1} & 0 \\ 0 & S\,C'S^{-1} \end{pmatrix}$$

Où R est une matrice orthogonale d'ordre 2, S une matrice orthogonale d'ordre $n-2$, B' une matrice de la forme R_θ et C' une matrice formée de blocs diagonaux de la forme R_θ.

On a alors par calcul par blocs :

$$A = Q\,\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix}Q^{-1}$$

et en posant :

$$P = Q\,\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$A = P\,A'P^{-1}$$

Donc A est semblable à A', ce qui prouve l'hérédité de la propriété.

Voyons maintenant le cas où A admet au moins une valeur propre réelle. Posons :

$$\mathbb{V} = \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_{-1} = ker(A - I_n) \oplus ker(A + I_n)$$

Alors $\mathbb{V}$ est stable par A donc son orthogonal également.

On considère alors une base orthonormale $(Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$ de $\mathbb{V}$ et une base orthonormale $(Q_{m+1}, Q_2, \dots, Q_n)$ de $\mathbb{V}^{\perp}$. L'union de ces bases forme alors une base orthonormale de $\mathbb{R}^n_{col}$ dont les colonnes forment une matrice orthogonale Q. On a alors :

$$A\,Q = Q\,A''$$

où A'' est de la forme par blocs :

$$A'' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

avec B formée soit d'un bloc I_m, soit d'un bloc $-I_m$, soit d'un sous-bloc diagonal I_r et d'un sous-bloc diagonale I_s et C orthogonale. On applique alors à C le résultat précédent :

$$C = S\,C'S^{-1}$$

où S est une matrice orthogonale et C' une matrice formée de sous blocs diagonaux de la forme R_θ.

On en déduit :

$$A = Q \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

et en posant :

$$P = Q \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$A = P\,A'P^{-1}$$

Donc A est semblable à A'.

VI Matrices orthogonales d'ordre 3

Les matrices orthogonales d'ordre 3 sont, d'après ce qui précède, de deux formes :

1ère forme : Les matrices de déterminant 1 qui sont les matrices semblables au type suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Les endomorphismes ayant dans une base orthonormale ce type de matrice sont des rotations de l'espace d'angle θ d'axe de rotation $ker(A - I_3)$ et sont qualifiés **d'isométries positives**.

2ème forme : Les matrices de déterminant -1 qui sont les matrices semblables à un des types suivants :

1er type :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les endomorphismes ayant dans une base orthonormale ce type de matrice sont des composées d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $ker(A - I_3)$ parallèlement à la droite $ker(A + I_3)$ avec une rotation d'axe $ker(A + I_3)$ et d'angle θ.

<u>2ème type</u> :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les endomorphismes ayant dans une base orthonormale ce type de matrice sont des symétries orthogonales par rapport au plan $ker(A - I_3)$ parallèlement à la droite $ker(A + I_3)$.

<u>3ème type</u> :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les endomorphismes ayant dans une base orthonormale ce type de matrice sont des homothéties de rapport -1.

Les endomorphismes ayant dans une base orthonormale un de ces trois types de matrice sont qualifiés **d'isométries négatives**.