L'algèbre des matrices

I Introduction par la résolution de systèmes

Reprenons un système à deux équations et deux inconnues, comme par exemple :

$$\begin{cases} 2\,x + 5\,y = 9 \\ 3\,x - 4\,y = 2 \end{cases}$$

Et l'application linéaire f associée sur $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$:

$$f \quad : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Rappelons que le système se réécrit sous la forme équivalente :

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ce qui se traduit encore par :

$$f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On convient alors de définir un tableau à deux lignes et deux colonnes appelé matrice, et de poser une opération qualifiée de produit matrice-vecteur-colonne de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, le produit consiste à effectuer une combinaison linéaire des vecteurs-colonne de la matrice par les coefficients formés par le vecteur-colonne sur lequel on la multiplie.

L'application linéaire se réécrit alors ainsi :

$$f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Et le système :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Cette dernière forme est appelée écriture matricielle du système.

Prenons un système plus général :

$$\begin{cases} a\,x + c\,y = u \\ b\,x + d\,y = v \end{cases}$$

L'écriture matricielle de ce système est :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Si on adopte les notations suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \;, \quad A_1^{col} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;, \quad A_2^{col} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \;, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;, \; Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Alors le système s'écrit :

$$A\,X = Y$$

ce qui l'apparente à une équation linéaire du type : y = a x posée sur des nombres réels. C'est ce qui justifie l'appellation de système linéaire.

Le produit matrice-vecteur s'écrit quant à lui :

$$A\,X = x\; A_1^{col} + y\; A_2^{col}$$

De la même façon, nous sommes amenés à définir plus généralement des tableaux avec un nombre de lignes et de colonnes quelconques, pouvant être associés à des systèmes ayant un nombre quelconque d'équations et d'inconnues, comme par exemple ce système à trois équations et deux inconnues :

$$\begin{cases} 5\,x + y = 1 \\ 3\,x + 8\,y = 0 \\ x + 7\,y = 2 \end{cases}$$

L'écriture matricielle de ce système est :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Voyons quelques exemples de calcul de produits matrice vecteur-colonne, pour différents type de matrices :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,x + y + 3\,z + t \\ 2\,x + 0\,y + 6\,z + 4\,t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Il est intéressant de noter que le produit d'une matrice par un vecteur-colonne composé de termes nuls sauf à la ligne d'indice k où il vaut 1 donne le $k$ième vecteur-colonne de la matrice.

1) Somme de deux matrices de même forme

Avec les objets mathématiques, il est intéressant d'effectuer des opérations. Nous allons donc tenter de trouver un sens à l'addition de deux matrices de même forme.

Considérons pour cela, deux applications linéaires f et g toutes deux associées à un système de deux équations à deux inconnues :

$$f \ : \ \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} \to \mathrm{x}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathrm{y}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$g \ : \ \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} \to \mathrm{x}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{y}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Alors, l'application linéaire somme est définie par :

$$f+g \ : \ \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} \to \mathrm{x}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathrm{y}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \mathrm{x}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{y}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \mathrm{x}\begin{pmatrix} 2+4 \\ 3+1 \end{pmatrix} + \mathrm{y}\begin{pmatrix} 5-1 \\ -4+7 \end{pmatrix} = \mathrm{x}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathrm{y}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

C'est donc l'application linéaire associée au système de matrice :

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Dont les termes sont obtenus en faisant la somme des termes de même position des matrices associées à chaque application linéaire. On est alors amené à définir une addition matricielle de cette façon :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & 5-1 \\ 3+1 & -4+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

On peut alors également définir le produit d'un nombre réel par une application linéaire, par exemple :

$$10.f \ : \ \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} \to 10.\left(\mathrm{x}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathrm{y}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = 10\,\mathrm{x}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 10\,\mathrm{y}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \mathrm{x}\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} + \mathrm{y}\begin{pmatrix} 50 \\ -40 \end{pmatrix}$$

Ce qui amène à définir le produit d'un nombre réel par une matrice :

$$10\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20 & 50\\ 30 & -40\end{pmatrix}$$

Reste une dernière opération à définir, et qui sera associée à la composée de deux applications linéaires. Reprenons ainsi, les deux applications précédemment définie et voyons comment s'écrit leur composition définie par :

$$f\circ g\left[\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\ \mathrm{y}\end{pmatrix}\right] = f\left(g\left[\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\ \mathrm{y}\end{pmatrix}\right]\right)$$

Exprimons le caractère linéaire de g par :

$$g\left[\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\ \mathrm{y}\end{pmatrix}\right] = g\left[\mathrm{x}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + \mathrm{y}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right] = \mathrm{x}\, g\left[\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right] + \mathrm{y}\, g\left[\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right]$$

Puis celui de f :

$$f\left(g\left[\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\ \mathrm{y}\end{pmatrix}\right]\right) = \mathrm{x}\, f\left(g\left[\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right]\right) + \mathrm{y}\, f\left(g\left[\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right]\right)$$

$f\circ g$ apparaît alors comme une l'application linéaire associée à la matrice dont la première colonne est $f\left(g\left[\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right]\right)$ et la seconde colonne $f\left(g\left[\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right]\right)$

En d'autres termes, en notant A la matrice associée à f, B la matrice associée à g et C celle associée à $f\circ g$, et notant de façon générale M_k^{col} le kième vecteur-colonne d'une matrices M nous avons :

$$C_1^{col} = A\, B_1^{col}$$

$$C_2^{col} = A\, B_2^{col}$$

Cela permet de définir une opération qui sera qualifiée de produit matriciel pour les propriétés qu'elle présent et que nous verrons plus loin, et que nous décrirons ainsi :

$$A\,B = A\left(B_1^{col}\ \mathrm{I}\ B_2^{col}\right) = \left(A\,B_1^{col}\ \mathrm{I}\ A\,B_2^{col}\right)$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix}5 & -5 & 4\\ 8 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

La première colonne de cette matrice est obtenue en effectuant le produit matrice-vecteur :

$$\begin{pmatrix}5 & -5 & 4\\ 8 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}5\\ 8\\ 2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\ 9\\ 11\end{pmatrix}$$

Noter qu'il a suffi d'ajouter la première et la dernière colonne

La seconde colonne de cette matrice est obtenue en effectuant le produit matrice-vecteur :

$$\begin{pmatrix}5&-5&4\\8&1&1\\2&3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-5\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\2\\6\end{pmatrix}$$

Noter qu'il a suffi de multiplier la deuxième colonne par 2.

Nous avons donc finalement :

$$\begin{pmatrix}5&-5&4\\8&1&1\\2&3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-10\\9&2\\11&6\end{pmatrix}$$

Lorsque la seconde matrice a peu de termes nuls, cette technique peut toutefois être remplacée par une disposition pratique, comme dans l'exemple visant au calcul de :

$$\begin{pmatrix}5&-5&4\\8&1&1\\2&3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&1\\5&2\\3&3\end{pmatrix}$$

On décale pour ce faire la seconde matrice vers le haut, selon cette disposition :

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix}6&1\\5&2\\3&3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}5&-5&4\\8&1&1\\2&3&9\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}17&\times\\\times&\times\\\times&\times\end{pmatrix}\end{matrix}$$

$$6\times5+5\times(-5)+3\times4$$

On calcule chaque terme à l'intersection d'une ligne de la première matrice et d'une colonne de la seconde matrice en ajoutant les produits des termes de même position de cette ligne et de cette colonne, comme dans l'exemple ci-dessus, pour le terme situé à l'intersection de la première ligne et de la première colonne.

Nous conseillons fortement au lecteur de jongler selon les situations entre les deux méthodes, la première présentant un avantage certain pour des produits de ce type :

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 0 & 9 & 4 \\ 7 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

Nous voyons pour ces deux exemples qu'il a suffi de multiplier les colonnes de la première matrice parles éléments diagonaux de la seconde. Nous reviendrons sur cette propriété avec l'étude des matrices diagonales.

II Définitions générales-Opérations

1) Définition

Une $\mathbb{K}$ matrice à n lignes et p colonnes est une application de $[\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$ dans un corps $\mathbb{K}$ (généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ mais pouvant être un corps fini à m éléments, m étant un nombre premier), soit :

$$\begin{gathered} [\![\mathbf{1};\boldsymbol{n}]\!] \times [\![\mathbf{1};\boldsymbol{p}]\!] \to \mathbb{K} \\ (\mathbf{i}\,,\mathbf{j}) \to \mathbf{a_{ij}} \end{gathered}$$

Par commodité, on la désignera par une lettre majuscule, sous la forme :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})_{\substack{\mathbf{1 \leq i \leq n} \\ \mathbf{1 \leq j \leq p}}}$$

et s'il n'y a pas d'ambiguïté compte de tenu du contexte , simplement par :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})$$

Une matrice sera représentée par un tableau à à n lignes et p colonnes, où le terme $\mathbf{a_{ij}}$ figure à l'intersection de la ligne de numéro i et de la colonne de numéro j

L'ensemble des $\mathbb{K}$ matrices à à n lignes et p colonnes est noté $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{np}}(\mathbb{K})$

Exemples de notation : dans $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$

$$\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2) <u>Addition et produit externe</u>

Soit $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \in \left(\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{np}}(\mathbb{K})\right)^{\mathbf{2}}$ **et** $\in \mathbb{K}$ **, posons :**

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{a_{ij}}\right)$$

$$\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{b_{ij}}\right)$$

Alors, on définit l'addition de deux matrices par :

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{c_{ij}}\right) \quad : \quad \boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}}$$

et le produit d'un élément du corps par une matrice par :

$$\boldsymbol{\alpha} \ \cdot \boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{d_{ij}}\right) \quad : \quad \boldsymbol{d_{ij}} = \boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{a_{ij}}$$

Nous avons alors la propriété, triviale à démontrer :

$\left(\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{np}}(\mathbb{K}), +, \cdot\right)$ **a une structure de** $\mathbb{K}$ **espace vectoriel dont le vecteur nul est la matrice dont tous les termes sont nuls.**

3) <u>Produit matrice vecteur-colonne</u>

Soit $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{n\,p}}(\mathbb{K})$ **et** $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{p\,1}}(\mathbb{K})$**, posons :**

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{a_{ij}}\right)$$

$$\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{x_j}\right)$$

Alors on définit le produit matrice vecteur-colonne par :

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$$

où :

$$\boxed{\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{x_1}\,\boldsymbol{A_1^{col}} + \boldsymbol{x_2}\,\boldsymbol{A_2^{col}} + \cdots + \boldsymbol{x_p}\,\boldsymbol{A_p^{col}} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{x_j}\,\boldsymbol{A_j^{col}}}$$

Où $A_1^{col},\ A_2^{col}, \dots, A_p^{col}$ désignent les p vecteurs-colonne de A

Soit en posant :

$$\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y_i})$$

$$\forall\, \boldsymbol{i} \in [\![\mathbf{1};\boldsymbol{n}]\!] \ \ : \ \ \boldsymbol{y_i} = \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{a_{ij}}\ \boldsymbol{x_j}$$

4) Produit matrice-matrice

Soit $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \in \mathcal{M}_{\mathbf{n\,p}}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{\mathbf{p\,q}}(\mathbb{K})$ **posons :**

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ik}})$$

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{kj}})$$

Alors on définit le produit matrice-matrice par :

$$\boldsymbol{A\,B} = \boldsymbol{C}$$

où : $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c_{ij}}) \in \mathcal{M}_{\mathbf{nq}}(\mathbb{K})$ **et :**

$$\forall\, \boldsymbol{j} \in [\![\mathbf{1};\boldsymbol{q}]\!] : \ \boldsymbol{C_j^{col}} = \boldsymbol{A\,B_j^{col}} = \boldsymbol{b_{1j}\,A_1^{col}} + \boldsymbol{b_{2j}\,A_2^{col}} + \cdots + \boldsymbol{b_{pj}\,A_p^{col}} = \sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{b_{kj}\,A_k^{col}}$$

Soit encore :

$$\forall\, (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) \in [\![\mathbf{1};\boldsymbol{n}]\!] \times [\![\mathbf{1};\boldsymbol{q}]\!] : \ \boldsymbol{c_{ij}} = \sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{a_{ik}}\ \boldsymbol{b_{kj}}$$

III Propriétés des opérations sur les matrices

1) Linéarité du produit matrice-vecteur

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n\,p}}(\mathbb{K})$ **et** $\boldsymbol{f}$ **l'application de** $\mathcal{M}_{\mathbf{p\,1}}(\mathbb{K})$ **dans lui-même définie par :**

$$\boldsymbol{f} \ : \ \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{A\,X}$$

Alors $\boldsymbol{f}$ **est un endomorphisme de** $\mathcal{M}_{\mathbf{p\,1}}(\mathbb{K})$

Preuve :

Soit $(X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})\right)^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$

Posons :

$$A = (a_{ij})$$

$$X = (x_j)$$

$$Y = (y_i)$$

Alors :

$$f(X+Y) = A\,(X+Y) = \sum_{j=1}^{p} (x_j + y_j)\, A_j^{col} = \sum_{j=1}^{p} (x_j\, A_j^{col} + y_j\, A_j^{col}) = \sum_{j=1}^{p} x_j\, A_j^{col} + \sum_{j=1}^{p} y_j\, A_j^{col}$$

donc

$$f(X+Y) = f(X) + f(Y)$$

De plus :

$$f(\alpha\, X) = \sum_{j=1}^{p} (\alpha\, x_j)\, A_j^{col} = \alpha \sum_{j=1}^{p} x_j\, A_j^{col} = \alpha\, f(X)$$

f est donc linéaire.

Conséquence :

Par récurrence immédiate, on en déduit que :

$$\boxed{\begin{gathered} \forall\, \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{n\,p}}(\mathbb{K}) \quad \forall\, (\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \dots, \boldsymbol{X_n}) \in \left(\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{p\,1}}(\mathbb{K})\right)^{\mathbf{n}} \ \forall\, (\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n}) \in (\mathbb{K})^{\mathbf{n}} : \\ \boldsymbol{A\,(\alpha_1\, X_1 + \alpha_2\, X_2 + \dots + \alpha_n\, X_n) = \alpha_1\, A\, X_1 + \alpha_2\, A\, X_2 + \dots + \alpha_n\, A\, X_n} \end{gathered}}$$

Soit en écriture plus compacte :

$$\boxed{\boldsymbol{A \left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i\, X_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, A\, X_i}}$$

2) Distributivité du produit matriciel par rapport à l'addition

Distributivité à gauche

Soit $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{n\,p}}(\mathbb{K}) \times \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{p\,q}}(\mathbb{K}) \times \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{p\,q}}(\mathbb{K})$ **alors :**

$$\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C}$$

Preuve :

Nous allons montrer que les matrices des deux membres de l'équation ont les mêmes vecteurs-colonne

posons :

$A = (a_{ik}) \quad B = \left(b_{kj}\right) \quad C = \left(c_{kj}\right)$

Soit $j \in [\![1; q]\!]$

$$[A\,(B + C)]_j^{col} = \sum_{k=1}^{p} \left(b_{kj} + c_{kj}\right) A_k^{col} = \sum_{k=1}^{p} b_{kj}\, A_k^{col} + \sum_{k=1}^{p} c_{kj}\, A_k^{col} = [A\,B]_j^{col} + [A\,C]_j^{col}$$

$$= [A\,B + A\,C]_j^{col}$$

Distributivité à droite

Soit $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{n\,p}}(\mathbb{K}) \times \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{n\,p}}(\mathbb{K}) \times \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{p\,q}}(\mathbb{K})$ **alors :**

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}$$

Preuve :

Nous allons montrer que les matrices des deux membres de l'équation ont les mêmes vecteurs-colonne

posons :

$A = (a_{ik}) \quad B = (b_{ik}) \quad C = \left(c_{kj}\right)$

Soit $j \in [\![1; q]\!]$

$$[(A+B)\,C]_j^{col} = \sum_{k=1}^{p} c_{kj}\,[A+B]_k^{col} = \sum_{k=1}^{p} c_{kj}\left(A_k^{col}+B_k^{col}\right) = \sum_{k=1}^{p} c_{kj}\,A_k^{col} + \sum_{k=1}^{p} c_{kj}\,B_k^{col}$$

$$= [A\,C]_j^{col} + [B\,C]_j^{col}$$

$$= [A\,C + B\,C]_j^{col}$$

3) Associativité du produit matriciel

Soit $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{n\,p}}(\mathbb{K}) \times \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{p\,q}}(\mathbb{K}) \times \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{q\,r}}(\mathbb{K})$ **alors :**

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\;(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})$$

Preuve :

Nous allons montrer que les matrices des deux membres de l'équation ont les mêmes termes

posons :

$A = (a_{ik})\quad B = (b_{ks})\quad C = \left(c_{sj}\right)$

$$[(A\,B)\,C]_{ij} = \sum_{s=1}^{q} [A\,B]_{i\,s}\,c_{sj} = \sum_{s=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\,b_{ks}\right) c_{sj} = \sum_{(s,k)\in[\![1;q]\!]\times[\![1;p]\!]} a_{ik}\,b_{ks}\,c_{sj}$$

$$[A\,(B\,C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\,[B\,C]_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\left(\sum_{s=1}^{q} b_{ks}\,c_{sj}\right) = \sum_{(s,k)\in[\![1;q]\!]\times[\![1;p]\!]} a_{ik}\,b_{ks}\,c_{sj}$$

4) Produit matriciel et produit externe

Soit $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{n\,p}}(\mathbb{K}) \times \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{p\,q}}(\mathbb{K})$ **et** $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{K}$ **alors :**

$$\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})$$

Preuve :

Nous allons montrer que les matrices des deux membres de l'équation ont les mêmes termes

posons :

$A = (a_{ik}) \quad B = (b_{kj})$

$$[A\,(\alpha\, B)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\,[\alpha\, B]_{kj} \; = \; \sum_{k=1}^{p} (\alpha\, a_{ik})\, b_{kj} \; = [(\alpha\, A)\, B]_{ij}$$

$$[A\,(\alpha\, B)]_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj} \; = \alpha\, [A\, B]_{ij}$$

Remarque :

Cette propriété peut s'avérer très utile pour simplifier les calculs comme le montre cet exemple

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 49 & 7 \\ 0 & -7 \\ 21 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \left(7 \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= 7 \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 7 \begin{pmatrix} 47 & 14 \\ 59 & 8 \\ 41 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 329 & 98 \\ 413 & 56 \\ 287 & 56 \end{pmatrix}$$

5) <u>Non commutativité du produit matriciel</u>

Le formalisme adopté pour les opérations sur les matrices est très proche de celui adopté pour les nombres, car les propriétés sont analogues. Toutefois, le terme de produit matriciel comporte un piège, car ce produit n'est pas commutatif. Un exemple simple permet de le vérifier dans $\boldsymbol{\mathcal{M}_{22}}(\mathbb{K})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

On peut d'ailleurs trouver un exemple de deux matrices carrées d'ordre n qui ne commutent pas dans pour tout entier nautrel n non nul. Il suffit de prendre :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\0 & 0 & & 0 & 0\\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\0 & 0 & & 0 & 0\\0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & 0 & & 0 & 0\\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\0 & 0 & & 0 & 0\\0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & 0 & & 0 & 0\\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\0 & 0 & & 0 & 0\\0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & 0 & & 0 & 0\\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\0 & 0 & & 0 & 0\\0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\0 & 0 & & 0 & 0\\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\0 & 0 & & 0 & 0\\0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2 & \cdots & 0 & 0\\0 & 0 & & 0 & 0\\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\0 & 0 & & 0 & 0\\0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

6) <u>Caractérisation de l'égalité de deux matrices</u>

Soit $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \in \left(\boldsymbol{\mathcal{M}_{n\,p}}(\mathbb{K})\right)^{2}$ alors :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \;\Leftrightarrow\; \forall\, \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{p\,1}}(\mathbb{K}) :\; \boldsymbol{A\,X} = \boldsymbol{B\,X}$$

<u>Preuve</u> :

$(\Rightarrow)$ Trivial

$(\Leftarrow)$ Considérons pour $j \in [\![1;p]\!]$ le vecteur-colonne $X = E_j$ dont tous les termes sont nuls sauf celui de la ligne j. Alors :

$$A\,E_j = A_j^{col}$$

$$B\,E_j = B_j^{col}$$

Donc :

$$A_j^{col} = B_j^{col}$$

Les deux matrices A et B ont donc les mêmes vecteurs-colonnes. Elles sont donc égales.

IV Anneau-Algèbre des matrices carrées d'ordre n

Soit $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ alors l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{M}_{\mathrm{n\,n}}}(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre $\boldsymbol{n}$ muni de l'addition et du produit matriciel a une structure d'anneau non commutatif d'élément neutre la matrice qualifiée de matrice identité :

$$\boldsymbol{I_n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle se définit également par le symbole de Kronecker :

$$\boldsymbol{I_n} = (\boldsymbol{\delta_{ij}})$$

où :

$$\boxed{\forall\ (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) \in [\![\mathbf{1};\boldsymbol{n}]\!]^2:\ \ \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j} \Rightarrow \boldsymbol{\delta_{ij}} = \mathbf{0}\ \ \textbf{et}\ \ \boldsymbol{\delta_{ii}} = \mathbf{1}}$$

Le fait que $\boldsymbol{\mathcal{M}_{\mathrm{n\,n}}}(\mathbb{K})$ muni de l'addition et du produit externe a une structure espace vectoriel et d'anneau fait qualifier la structure $(\boldsymbol{\mathcal{M}_{\mathrm{n\,n}}}(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ d'algèbre

Preuve :

Les propriétés mises en évidence précédemment montrent que $(\mathcal{M}_{\mathrm{n\,n}}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif d'élément neutre la matrice nulle

L'opposé d'une matrice est la matrice dont tous les termes sont opposés aux termes de la première

La multiplication est associative, distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition

Vérifions que I_n est bien l'élément neutre multiplicatif.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n\,n}(\mathbb{K})$ posons $A = (a_{ij})$ alors

$$[A\ I_n]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ \boldsymbol{\delta}_{kj} = a_{ij}$$

$$[I_n A]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\delta}_{ik} \, \boldsymbol{a}_{kj} = a_{ij}$$

Donc :

$$A \, I_n = I_n \, A = A$$

V Matrices et applications linéaires en dimension finie

Soit f une application linéaire d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{V}$ de dimension p dans un $\mathbb{K}'$ espace vectoriel $\mathbb{W}$ de dimension n

Soit $\left(\overrightarrow{\mathrm{a_1}}, \overrightarrow{\mathrm{a_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathrm{a_p}}\right)$ une base de $\mathbb{V}$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{b_1}}, \overrightarrow{\mathrm{b_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathrm{b_n}}\right)$ une base de $\mathbb{W}$ alors :

$$\forall \, \vec{\mathrm{u}} \in \mathbb{V} \; : \; \exists \, ! \, (\mathrm{x_1}, \mathrm{x_2}, \dots, \mathrm{x_n}) \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \; : \; \vec{\mathrm{u}} = \mathrm{x_1} \, \overrightarrow{\mathrm{a_1}} + \mathrm{x_2} \, \overrightarrow{\mathrm{a_2}} + \dots + \mathrm{x_p} \, \overrightarrow{\mathrm{a_p}}$$

Donc par linéarité

$$f(\vec{\mathrm{u}}) = \mathrm{x_1} \, f(\overrightarrow{\mathrm{a_1}}) + \mathrm{x_2} \, f(\overrightarrow{\mathrm{a_2}}) + \dots + \mathrm{x_p} \, f\left(\overrightarrow{\mathrm{a_p}}\right)$$

Notons :

$$X = \left(\mathrm{x_j}\right)$$

X est le vecteur-colonne formé par les coordonnées de $\vec{\mathbf{u}}$ dans la base $(\overrightarrow{\mathbf{a_\imath}})$

$$f(\vec{\mathrm{u}}) = \mathrm{y_1} \, \overrightarrow{\mathrm{b_1}} + \mathrm{y_2} \, \overrightarrow{\mathrm{b_2}} + \dots + \mathrm{y_n} \, \overrightarrow{\mathrm{b_n}}$$

$$Y = (\mathrm{y_i})$$

Y est le vecteur-colonne formé par les coordonnées de $f(\vec{\mathbf{u}})$ dans la base $\left(\overrightarrow{\mathbf{b_\imath}}\right)$

Notons alorst pour tout $j \in [\![1; p]\!]$:

$$f\left(\overrightarrow{\mathrm{a_j}}\right) = \mathrm{a_{1\,j}} \, \overrightarrow{\mathrm{b_1}} + \mathrm{a_{2\,j}} \, \overrightarrow{\mathrm{b_2}} + \dots + \mathrm{a_{n\,j}} \, \overrightarrow{\mathrm{b_n}}$$

$$A_j^{col} = \left(\mathrm{a_{ij}}\right)$$

A_j^{col} le vecteur-colonne formé par les coordonnées de $f\left(\overrightarrow{\mathbf{a_j}}\right)$ dans la base $\left(\overrightarrow{\mathbf{b_\imath}}\right)$

Alors on a :

$$Y = \mathrm{x_1} \, A_1^{col} + \mathrm{x_2} \, A_2^{col} + \dots + \mathrm{x_n} \, A_n^{col}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\boldsymbol{Y = A\,X}}$$

Où A est la matrice dont les vecteurs-colonne sont les A_j^{col}

$\boldsymbol{A}$ est appelée matrice de $\boldsymbol{f}$ relativement aux bases $(\overrightarrow{\mathbf{a_j}})$ et $(\overrightarrow{\mathbf{b_i}})$. On la note :

$$\boxed{\boldsymbol{A = \mathcal{M}_{(\overrightarrow{a_j})(\overrightarrow{b_i})}(f)}}$$

La matrice d'une application linéaire contient donc toutes les informations permettant de calculer l'image d'un vecteur ou son antécédent par cette application.

Exemple :

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{V}$ formé par les vecteurs d'un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Considérons l'application linéaire f définie par la rotation d'angle θ le plan étant orienté par la base du repère.

Alors :

$$f(\vec{\imath}) = \cos(\theta)\ \vec{\imath} + \sin(\theta)\ \vec{\jmath}$$

$$f(\vec{\jmath}) = -\sin(\theta)\ \vec{\imath} + \cos(\theta)\ \vec{\jmath}$$

Donc :

$$A = \mathcal{M}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

En posant :

$$\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$$

$$f(\vec{u}) = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath}$$

la transformation s'en déduit, d'abord sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

puis sous forme de système :

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta)\ x - \sin(\theta)\ y \\ y' = -\sin(\theta)\ x + \cos(\theta)\ y \end{cases}$$

VI Inversibilité d'une matrice carrée

1) Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n, on dit que A est inversible à droite si il existe une matrice carrée d'ordre n B telle que :

$$\boldsymbol{A\,B = I_n}$$

On dit que A est inversible à gauche si il existe une matrice carrée d'ordre n C telle que :

$$\boldsymbol{C\,A = I_n}$$

2) Théorème

A est inversible à gauche si et seulement si A est inversible à droite, plus précisément :

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{n\,n}}(\mathbb{K}) \quad : \ \boldsymbol{A\,B = I_n} \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{B\,A = I_n}}$$

De plus:

$$\boxed{\boldsymbol{A\,B = I_n = A\,C \Rightarrow \ B = C}}$$

Quand A est inversible, on note alors A^{-1} l'unique matrice de $\mathcal{M}_{\mathbf{n\,n}}(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\boxed{\boldsymbol{A\,A^{-1} = I_n = A^{-1}\,A}}$$

A^{-1} est appelée matrice inverse de A

3) Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice

Cette caractérisation conduit à une méthode pratique (pivot de Gauss) pour inverser une matrice

$$\boxed{\boldsymbol{A}\ \textbf{inversible} \Leftrightarrow \left(\exists\, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{nn}}(\mathbb{K}):\ \forall\,(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \in \left(\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{n1}}(\mathbb{K})\right)^{\mathbf{2}} :\ \ \boldsymbol{A\,X = Y} \Leftrightarrow \boldsymbol{X = B\,Y}\right)}$$

Autrement dit, une matrice est inversible si et seulement si le système linéaire associé $A\,X = Y$ conduit à une solution unique $X = B\,Y$ (on dit que le système est inversible)

Preuves du théorème

$(\Rightarrow)$ Supposons : $\exists\, B \in \mathcal{M}_{\mathrm{n\,n}}(\mathbb{K}) :\ \ A\,B = I_n$

Montrons alors que les n vecteurs-colonne de B forment une base de $\mathcal{M}_{\mathrm{n\,1}}(\mathbb{K})$ qui est un espace vectoriel de dimension n. Il suffit de montrer qu'ils forment une partie libre. Faisons le par l'absurde en supposant :

$$\exists\ (\mathrm{x}_1\,, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) \in \mathbb{K}^\mathrm{n} \setminus \{(0\,,0, \dots, 0)\} :\ \ \mathrm{x}_1\, B_1^{col} + \mathrm{x}_2\, B_2^{col} + \cdots + \mathrm{x}_\mathrm{n}\, B_n^{col} = 0_n$$

où nous avons noté 0_n le vecteur nul de $\mathcal{M}_{\mathrm{n\,1}}(\mathbb{K})$

Introduisons alors le vecteur-colonne X de $\mathcal{M}_{\mathrm{n\,1}}(\mathbb{K})$ dont le terme de la ligne j est x_j. Nous avons :

$$B\,X = 0_\mathrm{n}$$

Or :

$$A\,B\,X = I_n\,X = X$$

On en déduit :

$$A\,0_n = X$$

Donc :

$$0_n = X$$

Ce qui est contradictoire

Les vecteurs-colonne de B forment donc une partie libre donc génératrice de $\mathcal{M}_{\mathrm{n\,1}}(\mathbb{K})$

Soit $Y \in \mathcal{M}_{\mathrm{n\,1}}(\mathbb{K})$ alors :

$$\exists\ (\mathrm{x}_1\,, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) \in \mathbb{K}^\mathrm{n}\ :\ Y = \ \mathrm{x}_1\, B_1^{col} + \mathrm{x}_2\, B_2^{col} + \cdots + \mathrm{x}_\mathrm{n}\, B_n^{col}$$

Donc :

$$Y = B\,X$$

$$(B\,A)\,Y = (B\,A)\,B\,X$$

$$(B\,A)\,Y = \ B\ \ (A\,B)X$$

$$(B\,A)\,Y = \ B\ \ I_n\,X$$

$$(B\,A)\,Y = B\,X$$

Donc :

$$\forall\, Y \in \mathcal{M}_{\mathrm{n\,1}}(\mathbb{K}) :\ (B\,A)\,Y = Y = I_n\,Y$$

On en déduit :

$$B\ A = I_n$$

Voyons la suite :

Supposons $A\ B = I_n = A\ C$ alors :

$$A\ B - A\ C = O_{n\,n}$$

où $O_{n\,n}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{\mathrm{n\,n}}(\mathbb{K})$

donc :

$$A\ (B - \ C) = O_{n\,n}$$
$$B\ A\ (B - \ C) = B\ O_{n\,n}$$

$$I_n\ (B - \ C) = O_{n\,n}$$

$$B - \ C = O_{n\,n}$$

$$B = \ C$$

<u>Preuves de la caractérisation</u>

$(\Rightarrow)$ Supposons A inversible. Soit alors X et Y deux vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{\mathrm{n1}}(\mathbb{K})$. On a :

$$A\ X = Y \Leftrightarrow\ A^{-1}(A\ X) = A^{-1}\ Y$$

$$\Leftrightarrow\ (A^{-1}A)\ X = A^{-1}\ Y$$

$$\Leftrightarrow\ I_n\ X = A^{-1}\ Y$$

$$\Leftrightarrow\ X = A^{-1}\ Y$$

$(\Leftarrow)$ Supposons l'existence d'une matrice B de $\mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall\ (X, Y) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n1}}(\mathbb{K}) :\ \ A\ X = Y\ \Leftrightarrow\ X = B\ Y$$

Soit alors un vecteur colonne quelconque X de $\mathcal{M}_{\mathrm{n1}}(\mathbb{K})$, posons : $Y = A\ X$. D'après l'hypothèse nous avons :

$$X = B\ Y$$

Donc :

$$X = B\ (A\ X)$$

Soit :

$$X = (B\ A)\ X$$

On en déduit :

$$B\,A = I_n$$

Donc A est inversible à gauche donc inversible

4) Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2- Déterminant

Soit une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors on a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a\,d - b\,c) & 0 \\ 0 & (a\,d - b\,c) \end{pmatrix} = (a\,d - b\,c) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\boxed{\boldsymbol{A} \textbf{ inversible} \Leftrightarrow \ \boldsymbol{a\,d - b\,c \neq 0}}$$

et dans le cas où A est inversible :

$$\boxed{\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{a\,d - b\,c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}}$$

La quantité $a\,d - b\,c$ est appelée **déterminant de A** et sera définie de manière plus générale dans un fichier consacré aux déterminants de matrice.

VI Matrice de passage d'une base à une autre

Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel de dimension n et $(\overrightarrow{\mathrm{a}_1}, \overrightarrow{\mathrm{a}_2}, \dots, \overrightarrow{\mathrm{a}_\mathrm{n}})$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{b}_1}, \overrightarrow{\mathrm{b}_2}, \dots, \overrightarrow{\mathrm{b}_\mathrm{n}}\right)$ deux bases de $\mathbb{V}$, posons pour tout $j \in [\![1;p]\!]$:

$$\overrightarrow{\mathrm{b}_\mathrm{j}} = \mathrm{p}_{1\,\mathrm{j}}\,\overrightarrow{\mathrm{a}_1} + \mathrm{p}_{2\,\mathrm{j}}\,\overrightarrow{\mathrm{a}_2} + \cdots + \mathrm{p}_{\mathrm{n}\,\mathrm{j}}\,\overrightarrow{\mathrm{a}_\mathrm{n}}$$

$$P_j^{col} = \left(\mathrm{p}_{\mathrm{i}\,\mathrm{j}}\right)$$

$\boldsymbol{P_j^{col}}$ est donc le vecteur-colonne formé par les coordonnées de $\overrightarrow{\mathbf{b}_\mathbf{j}}$ dans la base $(\overrightarrow{\mathbf{a}_\mathbf{i}})$

Alors :

$$\forall\,\vec{\mathrm{u}} \in \mathbb{V} \;:\; \exists\,!\,(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) \in \mathbb{K}^\mathrm{n} \;:\; \vec{\mathrm{u}} = \mathrm{x}_1\,\overrightarrow{\mathrm{a}_1} + \mathrm{x}_2\,\overrightarrow{\mathrm{a}_2} + \cdots + \mathrm{x}_\mathrm{n}\,\overrightarrow{\mathrm{a}_\mathrm{n}}$$

$$\exists\,!\,(x'_1\,,x'_2,\dots,x'_n)\in\mathbb{K}^n\ :\ \vec{u}=x'_1\,\overrightarrow{b_1}+x'_2\,\overrightarrow{b_2}+\cdots+x'_n\,\overrightarrow{b_n}$$

Posons :

$$X=(x_i)$$

$$X'=(x'_i)$$

X est le vecteur-colonne formé par les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\overrightarrow{a_i})$

X' est le vecteur-colonne formé par les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\overrightarrow{b_i})$

Alors on a :

$$X=x'_1\,P_1^{col}+x'_2\,P_2^{col}+\cdots+x'_n\,P_n^{col}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\boldsymbol{X=P\,X'}}$$

où P est la matrice dont les vecteurs-colonne sont les P_j^{col}

P est appelée matrice de passage de la base $(\overrightarrow{a_i})$ à la base $(\overrightarrow{b_i})$. On la note :

$$\boxed{\boldsymbol{P=\mathcal{M}\left((\overrightarrow{a_i})\to(\overrightarrow{b_i})\right)}}$$

Une propriété remarquable est la suivante :

Toute matrice de passage est inversible

De façon plus précise :

Si $(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\dots,\overrightarrow{a_n})$ est une base d'un espace vectoriel $\mathbb{V}$ de dimension n et et $(\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\dots,\overrightarrow{b_n})$ une partie à n éléments de $\mathbb{V}$ alors :

$$\boxed{\boldsymbol{(\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\dots,\overrightarrow{b_n})\ \text{base de}\ \mathbb{V}\ \Leftrightarrow\ \mathcal{M}\left((\overrightarrow{a_i})\to(\overrightarrow{b_i})\right)\ \text{inversible}}}$$

Preuve :

Notons $P = \mathcal{M}\left((\overrightarrow{\mathrm{a_i}}) \to (\overrightarrow{\mathrm{b_i}})\right)$

$(\Rightarrow)$

Le fait que $\left(\overrightarrow{\mathrm{b_1}}, \overrightarrow{\mathrm{b_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathrm{b_n}}\right)$ soit une base fait qu'on peut décomposer chaque $\overrightarrow{\mathrm{a_j}}$ sur cette base pour tout $j \in [\![1; n]\!]$ sous la forme :

$$\overrightarrow{\mathrm{a_j}} = \mathrm{c_{1\,j}}\,\overrightarrow{\mathrm{b_1}} + \mathrm{c_{2\,j}}\,\overrightarrow{\mathrm{b_2}} + \cdots + \mathrm{c_{n\,j}}\,\overrightarrow{\mathrm{b_n}}$$

En notant E_{j} le vecteur-colonne de $\mathcal{M}_{\mathrm{n\,1}}(\mathbb{K})$ ayant tous ses termes nuls sauf celui de la ligne j qui vaut 1, c'est-à-dire la colonne-coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{a_j}}$ dans la base $(\overrightarrow{\mathrm{a_1}}, \overrightarrow{\mathrm{a_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathrm{a_n}})$, nous avons :

$$E_{\mathrm{j}} = \mathrm{c_{1\,j}}\,P_1^{col} + \mathrm{c_{2\,j}}\,P_2^{col} + \cdots + \mathrm{c_{n\,j}}\,P_n^{col}$$

Soit :

$$E_{\mathrm{j}} = P\,C_j^{col}$$

Où C_j^{col} désigne la jème colonne d'une matrice C de $\mathcal{M}_{\mathrm{n\,n}}(\mathbb{K})$

Nous en déduisons :

$$I_n = P\,C$$

Donc P est inversible à droite donc inversible

$(\Leftarrow)$

Supposons P inversible alors il existe une matrice A de $\mathcal{M}_{\mathrm{n\,n}}(\mathbb{K})$ telle que :

$$A\,P = I_n$$

Nous avons alors montré par l'absurde précédemment que cela entraînait que les n vecteurs-colonne de P formaient une base de $\mathcal{M}_{\mathrm{n\,1}}(\mathbb{K})$

Supposons alors :

$$\mathrm{x_1}\,\overrightarrow{\mathrm{b_1}} + \mathrm{x_2}\,\overrightarrow{\mathrm{b_2}} + \cdots + \mathrm{x_n}\,\overrightarrow{\mathrm{b_n}} = \vec{0}$$

Alors

$$\mathrm{x_1} P_1^{col} + \mathrm{x_2}\,P_2^{col} + \cdots + \mathrm{x_n}\,P_n^{col} = O_n$$

Donc, en introduisant le vecteur-colonne X de $\mathcal{M}_{\mathrm{n\,1}}(\mathbb{K})$ dont le terme de la ligne j est $\mathrm{x_j}$ nous avons :

$$P\,X = O_n$$

D'où :

$$A\,P\,X = A\,O_n$$

Soit :

$$I_n\,X = \,O_n$$

Finalement :

$$X = \,O_n$$

$(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n})$ est donc une partie libre de $\mathbb{V}$ donc une base.

VII Changement de base pour une application linéaire

Soit f une application linéaire d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{V}$ de dimension p dans un $\mathbb{K}'$ espace vectoriel $\mathbb{W}$ de dimension n

Soient $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_p})$ et $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_p})$ deux bases de $\mathbb{V}$, et $(\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \dots, \overrightarrow{c_n})$ et $(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}, \dots, \overrightarrow{d_n})$ deux bases de $\mathbb{W}$.

Notons :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\mathcal{M}}_{(\overrightarrow{\mathbf{a_j}})(\overrightarrow{\mathbf{c_i}})}(\boldsymbol{f})$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mathcal{M}}_{(\overrightarrow{\mathbf{b_j}})(\overrightarrow{\mathbf{d_i}})}(\boldsymbol{f})$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\mathcal{M}}_{(\overrightarrow{a_i})\to(\overrightarrow{\mathbf{b_i}})}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\mathcal{M}}_{(\overrightarrow{c_i})\to(\overrightarrow{\mathbf{d_i}})}$$

Le schéma résume les différentes définitions de matrices :

$$\begin{tikzcd}
\underset{(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_p})}{\mathbb{V}} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & \underset{(\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \dots, \overrightarrow{c_n})}{\mathbb{W}} \arrow[d, "Q"] \\
\underset{(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_p})}{\mathbb{V}} \arrow[r, "B"] & \underset{(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}, \dots, \overrightarrow{d_n})}{\mathbb{W}}
\end{tikzcd}$$

Alors :

$$\boxed{\boldsymbol{B = Q^{-1}\,A\,P}}$$

Un cas particulier important est celui des endomorphismes pour lesquels la base de l'ensemble d'arrivée est la base de l'ensemble de départ, à savoir :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{b_1}}, \overrightarrow{\mathrm{b_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathrm{b_p}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{a_1}}, \overrightarrow{\mathrm{a_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathrm{a_p}}\right) \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{d_1}}, \overrightarrow{\mathrm{d_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathrm{d_n}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{c_1}}, \overrightarrow{\mathrm{c_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathrm{c_n}}\right)$$

auquel cas :

$$\boldsymbol{Q = P}$$

et la formule devient :

$$\boxed{\boldsymbol{B = P^{-1}\,A\,P}}$$

<u>Preuve</u> :

Soit $\vec{\mathrm{u}}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{V}$, notons :

X le vecteur-colonne formé par les coordonnées de $\vec{\mathrm{u}}$ dans la base $\left(\overrightarrow{\mathrm{a_j}}\right)$

X' le vecteur-colonne formé par les coordonnées de $\vec{\mathrm{u}}$ dans la base $\left(\overrightarrow{\mathrm{b_j}}\right)$

Y le vecteur-colonne formé par les coordonnées de $f(\vec{\mathrm{u}})$ dans la base $\left(\overrightarrow{\mathrm{c_i}}\right)$

Y' le vecteur-colonne formé par les coordonnées de $f(\vec{\mathrm{u}})$ dans la base $\left(\overrightarrow{\mathrm{d_i}}\right)$

Alors nous avons :

$$Y = A\,X$$

$$Y' = B\,X'$$

$$X = P\,X'$$

$$Y = Q\,Y'$$

D'où on déduit :

$$Q\,Y' = A\,P\,X'$$

Soit :

$$\forall\, X' \in \mathcal{M}_{\mathrm{p}\,1}(\mathbb{K}) : \quad Q\,B\,X' = A\,P\,X'$$

D’où :

$$Q\,B\ = A\,P$$

Finalement, en multipliant à gauche par Q^{-1} : $\quad B\ = Q^{-1}A\,P$