Produit de matrices par blocs

I Produit matrice vecteur colonne par blocs sur un corps quelconque

a) Exemple avec une matrice carrée d'ordre 3

Rappelons ce qui définit le produit d'une matrice carrée d'ordre 3 par un vecteur colonne de même ordre :

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

Notons alors que la colonne d'ordre 2 formée par les deux premiers termes de la colonne résultat est :

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} (x_3)$$

Et que la colonne formée par le dernier terme est :

$$x_1 \ a_{31} + x_2 \ a_{32} + x_3 \ a_{33} = (a_{31} \ a_{32}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (a_{33})\,(x_3)$$

En définissant alors des sous blocs dans la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \qquad C = (a_{31} \quad a_{32}), \qquad D = (a_{33})$$

dans le vecteur colonne :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad X' = (x_3)$$

et dans le vecteur colonne résultat :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad Y' = (y_3)$$

on a donc :

$$A\,X + B\,X' = Y$$

$$C\,X + D\,X' = Y'$$

On pourra donc écrire le produit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix}$$

Les calculs présentés de la façon précédente sont qualifiés de calcul par bloc.

b) <u>généralisation</u> :

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes et X un vecteur colonne à p éléments. Divisons cette matrice en m lignes de q sous blocs $(A_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le q}}$, chacun des sous blocs d'une même ligne de sous blocs ayant le même nombre de lignes et chacun des sous blocs d'une même colonne de sous blocs ayant le même nombre de colonnes. Divisons également X en q sous colonnes, la sous colonne j notée X_j ayant la même nombre d'éléments que le nombre de colonnes des sous blocs de la colonne j de sous blocs. Alors le produit $A\,X$ est une colonne formée de m sous colonnes dont celle de rang i notée Y_i s'obtient par le calcul, dit par blocs :

$$Y_i = \sum_{j=1}^{q} A_{ij}\ X_j$$

<u>II Produit de matrices par bloc</u>

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes, B une matrice à p lignes et m colonnes. Divisons comme précédemment cette matrice en m lignes de q sous blocs $(A_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le q}}$et divisons la matrice B en q lignes de r sous blocs $(B_{ij})_{\substack{1\le i\le q\\ 1\le j\le r}}$ alors le produit $A\,B$ est constitué de m lignes de r sous blocs $(C_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le r}}$ tels que celui de la ligne i et de la colonne j soit :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{q} A_{ik}\ B_{kj}$$

<u>Exemple</u> :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 5 & 7 \\ 6 & 8 \\ \hline 0 & 3 \end{array}\right)$$

Le premier calcul par bloc est :

$$\boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}}\ \boxed{\begin{array}{cc} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{array}} + \boxed{4}\ \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 3 \end{array}}$$

Sachant que lorsqu'on multiplie une ligne de termes nuls par une matrice, on obtient une ligne de termes nuls, ce calcul est très aisé à faire et donne la première ligne de la matrice résultat à savoir :

$$\boxed{\begin{array}{cc} 0 & 12 \end{array}}$$

Quant aux autres lignes, elles sont obtenues par le second calcul par bloc :

$$\boxed{\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{array}}\ \boxed{\begin{array}{cc} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{array}} + \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}}\ \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 3 \end{array}}$$

Sachant que lorsqu'on multiplie une colonne de termes nuls par une matrice ligne, on obtient une matrice de termes nuls, et que lorsqu'on multiplie une matrice diagonale par une matrice, cela revient à multiplier les lignes de cette dernière par les éléments diagonaux de même position, ce calcul est très aisé à faire et donne :

$$\begin{array}{|cc|}\hline 10 & 14 \\ 18 & 24 \\ \hline\end{array}$$

Finalement, on obtient comme résultat :

$$\begin{array}{|cc|}\hline 0 & 3 \\ \hline 10 & 14 \\ 18 & 24 \\ \hline\end{array}$$

<u>Cas particulier de matrices formées de sous blocs diagonaux :</u>

Dans le cas particulier où les matrices A et B sont deux matrices carrées de même ordre n et qu'elles sont formées de p sous blocs diagonaux respectifs $(D_i)_{1\leq i\leq p}$ et $(D'_i)_{1\leq i\leq p}$, les sous blocs de rang i étant d'un même ordre n_i, donc : $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$, le produit $A\,B$ est une matrice formée de p sous blocs diagonaux $(D''_i)_{1\leq i\leq p}$ tels que $D''_i = D_i\,D'_i$

<u>III Décomposition d'une matrice sur une matrice semblable</u>

<u>a) Un exemple avec une matrice carrée d'ordre 2</u>

Supposons qu'une matrice se décompose en produit de deux autres :

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Alors, on vérifie aisément, en effectuant le calcul par bloc, que pour toute matrice M carrée d'ordre quelconque n on a :

$$\begin{pmatrix} c_{11}\,M & c_{12}\,M \\ c_{21}\,M & c_{22}\,M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\,M & a_{12}\,M \\ a_{21}\,M & a_{22}\,M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}\,I_n & b_{12}\,I_n \\ b_{21}\,I_n & b_{22}\,I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\,I_n & a_{12}\,I_n \\ a_{21}\,I_n & a_{22}\,I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}\,M & b_{12}\,M \\ b_{21}\,M & b_{22}\,M \end{pmatrix}$$

Une conséquence est la suivante :

Supposons une matrice A carrée d'ordre 2 semblable à une matrice B soit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_{11} & p'_{12} \\ p'_{21} & p'_{22} \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_{11} & p'_{12} \\ p'_{21} & p'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, on vérifie aisément par calcul par bloc :

$$\begin{pmatrix} a_{11}\,M & a_{12}\,M \\ a_{21}\,M & a_{22}\,M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}\,I_n & p_{12}\,I_n \\ p_{21}\,I_n & p_{22}\,I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}\,M & b_{12}\,M \\ b_{21}\,M & b_{22}\,M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_{11}\,I_n & p'_{12}\,I_n \\ p'_{21}\,I_n & p'_{22}\,I_n \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{pmatrix} p_{11}\, I_n & p_{12}\, I_n \\ p_{21}\, I_n & p_{22}\, I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_{11}\, I_n & p'_{12}\, I_n \\ p'_{21}\, I_n & p'_{22}\, I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

Donc la matrice $A' = \left(a_{ij}\, M\right)_{\substack{1\le i\le 2 \\ 1\le j\le 2}}$ est semblable à la matrice $B' = \left(b_{ij}\, M\right)_{\substack{1\le i\le 2 \\ 1\le j\le 2}}$

Traitons alors deux cas :

<u>1er cas :</u> <u>La matrice B' est diagonale non nulle soit A diagonalisable et non nulle</u>

Dans ce cas :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_{11} & p'_{12} \\ p'_{21} & p'_{22} \end{pmatrix}$$

On supposera $b_1 \neq 0$

et :

$$\begin{pmatrix} a_{11}\, M & a_{12}\, M \\ a_{21}\, M & a_{22}\, M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}\, I_n & p_{12}\, I_n \\ p_{21}\, I_n & p_{22}\, I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1\, M & O_n \\ O_n & b_2\, M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_{11}\, I_n & p'_{12}\, I_n \\ p'_{21}\, I_n & p'_{22}\, I_n \end{pmatrix}$$

Si M est également diagonalisable alors elle se met sous forme :

$$M = R\, D\, R^{-1}$$

où D est diagonale et le calcul par blocs montre que l'on a :

$$\begin{pmatrix} a_{11}\, M & a_{12}\, M \\ a_{21}\, M & a_{22}\, M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}\, I_n & p_{12}\, I_n \\ p_{21}\, I_n & p_{22}\, I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & O_n \\ O_n & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1\, D & O_n \\ O_n & b_2\, D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{-1} & O_n \\ O_n & R^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_{11}\, I_n & p'_{12}\, I_n \\ p'_{21}\, I_n & p'_{22}\, I_n \end{pmatrix}$$

Soit, en posant :

$$Q = \begin{pmatrix} p_{11}\, I_n & p_{12}\, I_n \\ p_{21}\, I_n & p_{22}\, I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & O_n \\ O_n & R \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\, M & a_{12}\, M \\ a_{21}\, M & a_{22}\, M \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} b_1\, D & O_n \\ O_n & b_2\, D \end{pmatrix} Q^{-1}$$

La matrice $A' = \left(a_{ij}\, M\right)_{\substack{1\le i\le 2 \\ 1\le j\le 2}}$ est donc diagonalisable.

Réciproquement, si la matrice A' est diagonalisable, alors elle possède un polynôme annulateur U scindé à racines simples. Notons alors qu'en posant :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11}\, I_n & p_{12}\, I_n \\ p_{21}\, I_n & p_{22}\, I_n \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{pmatrix} b_1\, M & O_n \\ O_n & b_2\, M \end{pmatrix} = P^{-1}\, A' P$$

Donc en élevant à une puissance entière naturelle quelconque k :

$$\begin{pmatrix} (b_1\, M)^k & O_n \\ O_n & (b_2\, M)^k \end{pmatrix} = P^{-1}\, {A'}^k P$$

Ainsi pour tout polynôme F de $\mathbb{K}[X]$:

$$\begin{pmatrix} F(b_1\,M) & O_n \\ O_n & F(b_2\,M) \end{pmatrix} = P^{-1}\,F(A')\,P$$

Et en prenant le polynôme U, on en déduit :

$$U(b_1\,M) = U(b_2\,M) = 0$$

Ainsi, le polynôme $U(b_1\,X)$ est annulateur de M.

Or, si on désigne par $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ les racines simples distinctes de U on a :

$$U = (X - \mu_1)\,(X - \mu_2) \dots (X - \mu_s)$$

Et :

$$\begin{aligned} U(b_1\,X) &= (b_1\,X - \mu_1)\,(b_1\,X - \mu_2) \dots (b_1\,X - \mu_s) \\ &= {b_1}^s \left(X - \frac{\mu_1}{b_1}\right) \left(X - \frac{\mu_2}{b_1}\right) \dots \left(X - \frac{\mu_s}{b_1}\right) \end{aligned}$$

$U(b_1\,X)$ est donc un polynôme scindé à racines simples et donc, M est diagonalisable.

Ainsi :

Lorsque la matrice $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 2}}$ est diagonalisable non nulle, la matrice $(a_{ij}\,M)_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 2}}$ est diagonalisable si et seulement si la matrice M est diagonalisable.

2ème cas : La matrice B' est triangulaire supérieure à diagonale non nulle soit A trigonalisable mais pas nilpotente

Dans ce cas :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_{11} & p'_{12} \\ p'_{21} & p'_{22} \end{pmatrix}$$

On supposera $b_{11} \neq 0$

et :

$$\begin{pmatrix} a_{11}\,M & a_{12}\,M \\ a_{21}\,M & a_{22}\,M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}\,I_n & p_{12}\,I_n \\ p_{21}\,I_n & p_{22}\,I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}\,M & b_{12}\,M \\ O_n & b_{22}\,M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_{11}\,I_n & p'_{12}\,I_n \\ p'_{21}\,I_n & p'_{22}\,I_n \end{pmatrix}$$

Si M est également trigonalisable alors elle se met sous forme :

$$M = R\,T\,R^{-1}$$

où T est triangulaire supérieure et le calcul par blocs montre que l'on a :

$$\begin{pmatrix} a_{11}\,M & a_{12}\,M \\ a_{21}\,M & a_{22}\,M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}\,I_n & p_{12}\,I_n \\ p_{21}\,I_n & p_{22}\,I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & O_n \\ O_n & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}\,T & b_{12}\,T \\ O_n & b_{22}\,T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{-1} & O_n \\ O_n & R^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_{11}\,I_n & p'_{12}\,I_n \\ p'_{21}\,I_n & p'_{22}\,I_n \end{pmatrix}$$

Soit, en posant :

$$Q = \begin{pmatrix} p_{11}\,I_n & p_{12}\,I_n \\ p_{21}\,I_n & p_{22}\,I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & O_n \\ O_n & R \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\,M & a_{12}\,M \\ a_{21}\,M & a_{22}\,M \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} b_{11}\,T & b_{12}\,T \\ O_n & b_{22}\,T \end{pmatrix} Q^{-1}$$

La matrice $A' = (a_{ij}\,M)_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 2}}$ est donc trigonalisable.

Réciproquement, si la matrice A' est trigonalisable, alors son polynôme caractéristique $\pi_{A'}$ est scindé. Or c'est aussi le polynôme caractéristique de la matrice :

$$\begin{pmatrix} b_{11}\,T & b_{12}\,T \\ O_n & b_{22}\,T \end{pmatrix}$$

Et la propriété de calcul par blocs du déterminant donne :

$$\pi_{A'} = det(b_{11}\,T - X\,I_n)\,det(b_{22}\,T - X\,I_n)$$

Donc $det(b_{11}\,T - X\,I_n)$ est scindé. Or, en désignant par π_T le polynôme caractéristique de T donc de M :

$$det(b_{11}\,T - X\,I_n) = {b_{11}}^n\,det\left(T - \frac{1}{b_{11}}X\,I_n\right) = {b_{11}}^n\,\pi_T\left(\frac{1}{b_{11}}X\right)$$

Donc $\pi_T\left(\frac{1}{b_{11}}X\right)$ est scindé et donc $\pi_M = \pi_T$ est scindé et M est trigonalisable.

Lorsque la matrice $\boldsymbol{(a_{ij})_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 2}}}$ est trigonalisable non nilpotente, la matrice $\boldsymbol{(a_{ij}\,M)_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 2}}}$ est trigonalisable si et seulement si la matrice $\boldsymbol{M}$ est trigonalisable.

Lorsque la matrice $\boldsymbol{(a_{ij})_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 2}}}$ est nilpotente, la matrice $\boldsymbol{(a_{ij}\,M)_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 2}}}$ est nilpotente pour toute matrice $\boldsymbol{M}$