

Lois de probabilités usuelles

I Lois discrètes

a) Loi binomiale

Considérons une expérience aléatoire qui consiste à sélectionner au hasard dans une population de N individus un échantillon de n individus ($n \leq N$) sachant que dans la population il y a une proportion p d'individus ayant un caractère donné C .

Définissons, pour l'expérience consistant en un tirage d'un seul individu, l'évènement :

$$S = \text{"Obtenir un individu de caractère } C\text{"}$$

Les individus étant sélectionnés au hasard, nous avons :

$$p(S) = p$$

$$p(\overline{S}) = q = 1 - p$$

Définissons, pour l'expérience consistant à prélever un échantillon de taille n , les n évènements suivants :

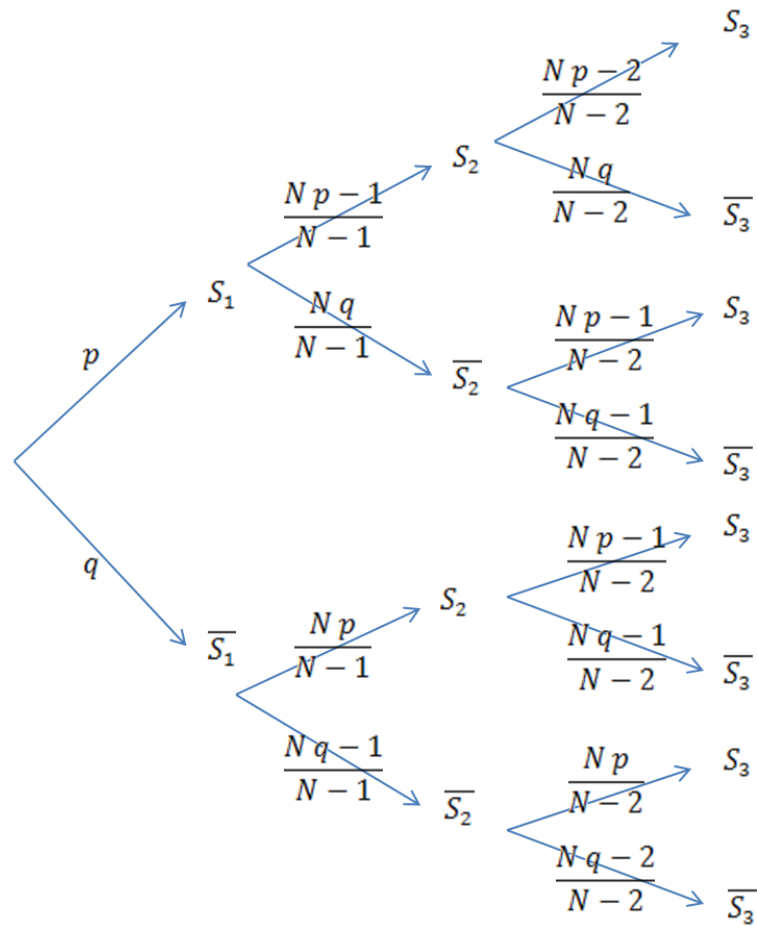
$$S_1 = \text{"Le premier individu de l'échantillon a le caractère } C\text{"}$$

$$S_2 = \text{"Le second individu de l'échantillon a le caractère } C\text{"}$$

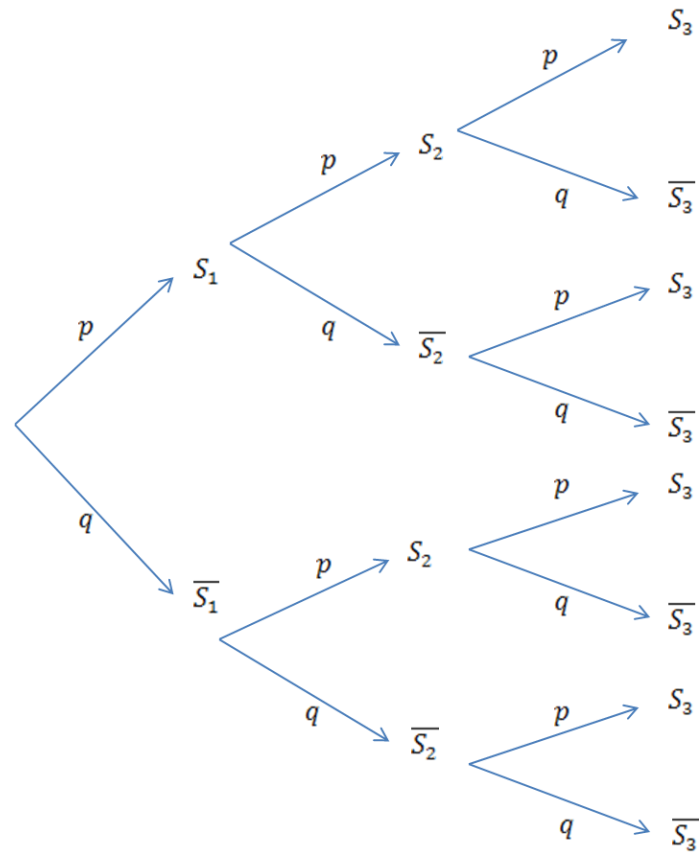
⋮

$$S_n = \text{"Le } n\text{ième individu de l'échantillon a le caractère } C\text{"}$$

Nous pouvons décrire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités, donné ci-dessous dans le cas où $n = 3$ pour simplifier. Pour se représenter la situation, on peut imaginer une urne avec 100 boules vertes et 300 boules rouges dont on tire au hasard successivement et sans remise trois boules, auquel cas, si le caractère C est la couleur verte, p est la proportion de boules vertes dans l'urne, soit 0,25.



Toutefois, dans le cas qui sera celui d'intérêt pratique, où N est grand devant n (au moins un facteur 100 pour fixer les idées) et p ni trop petit ni trop grand (disons entre 0,01 et 0,99 pour fixer les idées) nous observons que l'arbre peut être approché par le suivant :



Or cet arbre correspond à l'expérience aléatoire qui consisterait à obtenir l'échantillon par une succession de n tirages avec remise.

Considérons alors la variable aléatoire X qui compte le nombre d'individus de caractère C dans l'échantillon. Afin de faciliter l'étude, introduisons n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies comme suit :

$$X_i = 1 \quad \text{si } S_i \text{ réalisé,} \quad 0 \text{ sinon}$$

Ces variables, dites de **Bernoulli**, ne prennent que deux valeurs 0 et 1 et leurs caractéristiques sont :

$$E(X_i) = 0 \times P(X_i = 0) + 1 \times P(X_i = 1) = p$$

$$E(X_i^2) = 0^2 \times P(X_i = 0) + 1^2 \times P(X_i = 1) = p$$

$$V(X_i) = p - p^2 = p(1 - p) = p q$$

En considérant la situation approchée du tirage avec remise, ces variables sont mutuellement indépendantes, tout comme les événements $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ donc en particulier indépendantes deux à deux. De plus on a :

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

Il en résulte :

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n p$$

$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) = n p q$$

Voyons la loi suivie par X . Les valeurs de X sont les entiers de $\llbracket 0; n \rrbracket$ et il résulte de l'arbre pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ représentant le nombre de façons de choisir k tirages où obtenir un individu de caractère C (on parle de succès). Ainsi dans l'exemple $\binom{3}{2}$ dénombre les 3 chemins suivants :

$$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \overline{S}_3$$

$$S_1 \rightarrow \overline{S}_2 \rightarrow S_3$$

$$\overline{S}_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3$$

Ce que l'on simplifiera sous forme :

$$S S \overline{S}$$

$$S \overline{S} S$$

$$\overline{S} S S$$

Notons que cela revient à choisir la position de $\overline{S}$ c'est-à-dire le tirage où il y a échec.

Observons enfin que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1$$

ce qui n'est autre que l'expression du binôme de Newton. Pour cela, les coefficients $\binom{n}{k}$ sont appelés **coefficients binomiaux** et la loi de X est qualifiée de binomiale.

b) Loi hypergéométrique

C'est la loi de la variable X définie précédemment mais sans faire d'approximation. Tous les échantillons étant équiprobables, pour dénombrer ceux pour lesquels k individus sur les n ont le caractère C, il nous faut sélectionner k tirages parmi n où placer k individus de caractère C, les $n - k$ autres tirages correspondant à des individus de caractère contraire. Cela donne :

$$\binom{n}{k} A_{Np}^k A_{Nq}^{n-k}$$

Or le nombre d'échantillons possibles est :

$$A_N^n$$

La loi de X s'en déduit :

$$P(X = k) = \frac{\binom{n}{k} A_{Np}^k A_{Nq}^{n-k}}{A_N^n}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(Np)!}{(Np-k)!} \times \frac{(Nq)!}{(Nq-(n-k))!} \times \frac{(N-n)!}{N!} \\ &= \frac{(Np)!}{k!(Np-k)!} \times \frac{(Nq)!}{(n-k)!(Nq-(n-k))!} \times \frac{n!(N-n)!}{N!} \end{aligned}$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Comme dans le cas précédent, nous avons :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Il en résulte :

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = np$$

Mais la formule de la variance n'est plus valable car les variables X_i ne sont pas indépendantes deux à deux.

c) Loi géométrique

Reprenons l'expérience aléatoire d'un tirage avec remise de n individus dans une population de taille N où il y a une proportion p d'individus de caractère C et reprenons les événements S_i définis précédemment.

Soit alors la variable aléatoire X prenant la valeur du plus petit des indices i pour lesquels l'évènement S_i est réalisé lorsqu'au moins un de ces évènements se réalise et 0 sinon. Alors :

$$P(X = 0) = P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_n}) = q^n$$

et pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$P(X = k) = P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k) = q^{k-1} p$$

Or nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

Il est donc plus commode de considérer une expérience constituée d'un tirage infini avec remise. Dans ce cas, X prend les valeurs de $\mathbb{N}^*$ et la loi de X , qualifiée de loi géométrique est définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par :

$P(X = k) = q^{k-1} p$

A noter que l'on a bien :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = p \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} = p \times \frac{1}{1-q} = p \times \frac{1}{p} = 1$$

Calculons alors l'espérance puis la variance :

Partons de l'identité pour $-1 < x < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

qui, par dérivation, donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n q^{n-1} (1-q) = (1-q) \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p} \\E(X^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^{n-1} (1-q) = (1-q) \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + n) q^{n-1} = \\&= (1-q) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) q^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n q^{n-1} \right) \\&= (1-q) \left(q \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) q^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n q^{n-1} \right) \\&= (1-q) \left(q \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2} \right) \\&= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}\end{aligned}$$

Donc :

$$V(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q + p - 1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Soit résumé :

$E(X) = \frac{1}{p}$ $V(X) = \frac{q}{p^2}$

d) Loi de Poisson

Une variable aléatoire discrète suit une loi de Poisson de paramètre λ si elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et si pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(X = k) = a \frac{\lambda^k}{k!}$$

$k!$ est là pour assurer que la probabilité tende bien vers 0 quand k tend vers l'infini car λ^k tend vers l'infini lorsque $\lambda > 1$ et d'après la règle de D'Alembert $\lambda^k/k!$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini. a est une constante que nous allons déterminer en écrivant :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$$

$$a \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$$

$$a e^{\lambda} = 1$$

$$a = e^{-\lambda}$$

D'où la loi :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Calculons l'espérance et la variance :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1) \lambda^{k+1}}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k \lambda^{k+1}}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \right)$$

$$= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \right)$$

$$= e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$$

$$= e^{-\lambda} (\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda})$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

Donc :

$$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

En résumé :

$E(X) = V(X) = \lambda$

II Lois continues

a) Loi uniforme

Imaginons une expérience aléatoire où on envoie une boule de bowling sur une piste mais en mettant des barrières latérales afin que la boule reste toujours sur la piste et en tirant les yeux bandés. Graduons l'extrémité de la piste entre 0 et 1 par exemple. Si nous répétons l'expérience un très grand nombre de fois, nous allons constater que la boule quitte la piste aux différentes abscisses à la même fréquence.

Une variable aléatoire continue suit une loi uniforme si sa densité est constante sur un intervalle $[a, b]$ soit :

$$f(x) = c \text{ si } x \in [a, b], 0 \text{ sinon}$$

La constante c est déterminée par la condition dite de normalisation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Soit :

$$\int_a^b c dx = 1$$

$$c(b - a) = 1$$

$$c = \frac{1}{b - a}$$

D'où :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ sur } [a, b], 0 \text{ sinon}$$

Calculons son espérance et sa variance.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{a^2 + a b + b^2}{3}$$

$$V(X) = \frac{a^2 + a b + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

$$= \frac{a^2 + a b + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2 a b + b^2}{4}$$

$$= \frac{a^2 - 2 a b + b^2}{12}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

Soit en notant r le rayon de l'intervalle c'est-à-dire :

$$r = \frac{b-a}{2}$$

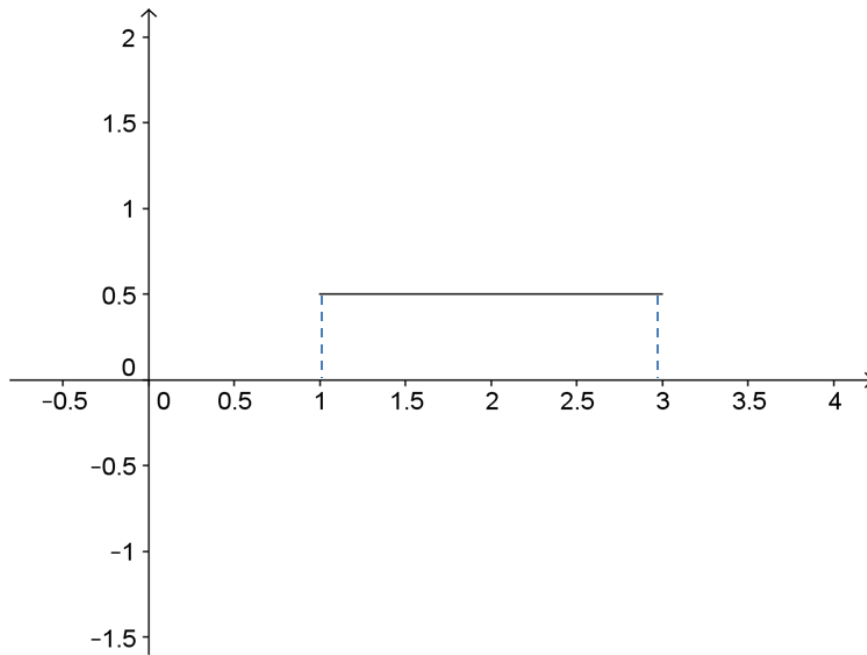
$$V(X) = \frac{r^2}{3}$$

Résumé :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \frac{r^2}{3}$$

Allure pour $a = 1, b = 3$



b) Loi exponentielle

Une variable aléatoire continue suit une loi exponentielle de paramètre λ si sa densité est de la forme :

$$f(x) = c e^{-\lambda x} \text{ si } x \in [0; +\infty[\text{ 0 sinon}$$

La constante c est déterminée par la condition de normalisation :

$$\int_0^{+\infty} c e^{-\lambda x} dx = 1$$

$$c \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} = 1$$

$$\frac{c}{\lambda} = 1$$

D'où :

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ sur } [0; +\infty[, \text{ 0 sinon}$
--

Calculons son espérance et sa variance.

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Faisons une intégration par partie en posant :

$$u(x) = x ; \quad v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$u'(x) = 1 ; \quad v(x) = -e^{-\lambda x}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= [-x e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Faisons une intégration par partie en posant :

$$u(x) = x^2 ; \quad v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$u'(x) = 2x ; \quad v(x) = -e^{-\lambda x}$$

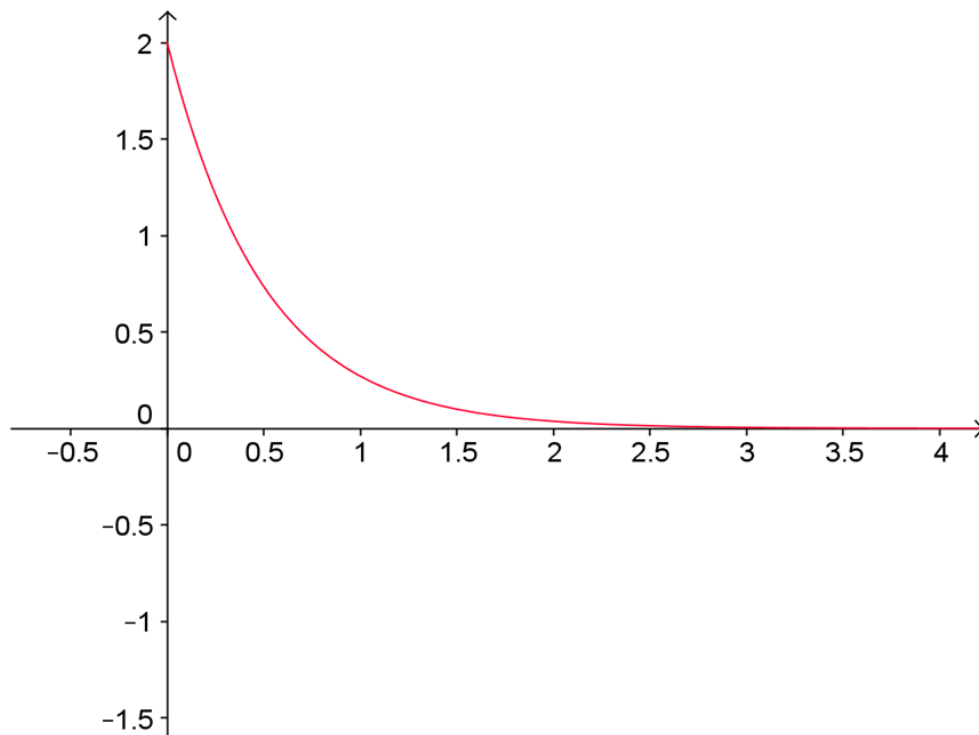
$$\begin{aligned} E(X^2) &= [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

En résumé :

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Allure pour $\lambda = 2$



c) Loi normale

La loi normale a fait l'objet d'un fichier pour en décrire la philosophie de construction.
Rappelons en les caractéristiques :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

$$E(X) = m$$

$$V(X) = \sigma^2$$

Rappelons la propriété essentielle :

Si X est une variable distribuée selon une loi normale d'espérance m et d'écart type σ , alors la variable $Y = (X - m)/\sigma$ est distribuée selon une loi normale d'espérance nulle et d'écart type unité appelée loi normale centrée réduite.

Allure pour une même espérance et différents écart-types. Plus l'écart-type est grand, plus la fonction s'étale.

