Limites des fonctions numériques

I Introduction

La notion de limite pour une fonction réelle de la variable réelle étend celle de limite pour une suite numérique.

Prenons les exemples suivants pour le saisir :

1er exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2$$

Cette fonction définit la suite explicite U :

$$U_n = n^2$$

Nous avons vu que :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$$

Or f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Cela conduit à formaliser un concept traduisant le fait que f prend des valeurs pouvant être plus grandes qu'une valeur arbitraire à partir de certaines valeurs de sa variable, ce qui aboutira à l'écriture :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2er exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Considérons la suite explicite X :

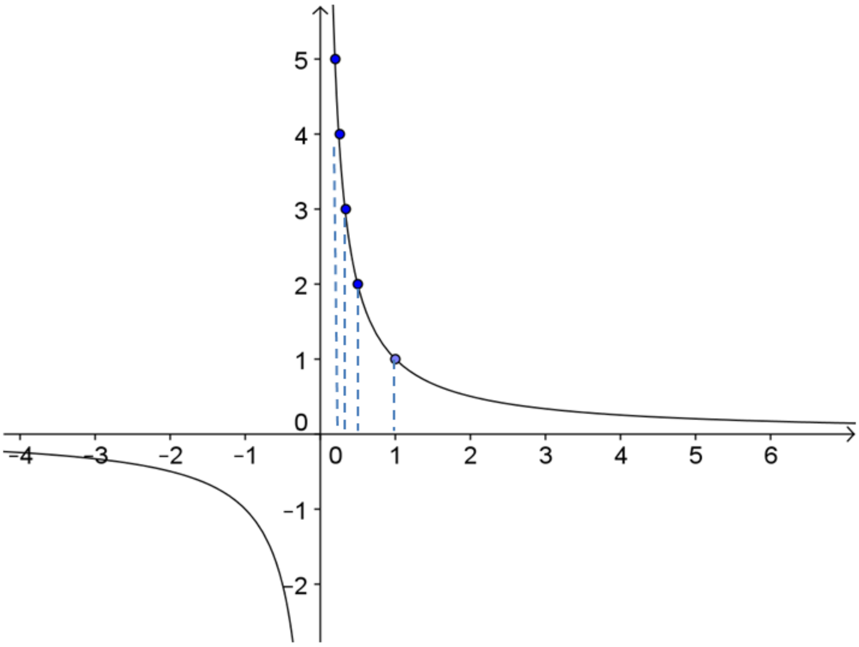
$$X_n = \frac{1}{n}$$

Nous avons vu que :

$$\lim_{n \to +\infty} X_n = 0$$

Nous avons alors :

$$\lim_{n\to+\infty} f(X_n) = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$



Or f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. Cela conduit à formaliser un concept traduisant le fait que f prend des valeurs pouvant être plus grande qu'une valeur arbitraire pourvu que sa variable x soit suffisamment proche de 0 tout en restant strictement positive, ce qui aboutira à l'écriture suivante, traduisant que f a une limite à droite quand sa variable tend vers 0 par valeur supérieure :

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

A noter qu'en considérant la suite :

$$X_n = -\frac{1}{n}$$

nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} f(X_n) = \lim_{n\to+\infty} -n = -\infty$$

ce qui aboutira à l'écriture suivante, traduisant que f a une limite à gauche quand sa variable tend vers 0 par valeur inférieure

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty$$

Nous voyons donc d'emblée que le concept de limite pour une fonction sera plus riche que celui pour une suite, avec une notion de limite quand la variable tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, mais aussi quand elle tend vers une valeur fixe qui peut être une valeur de son domaine de définition ou non, et par valeur inférieure ou supérieure.

II Concept mathématique de limite

Dans toute la suite, ε , A et α sont des nombres réels et f est une fonction réelle de la variable réelle.

1) Limite en $+\infty$

f tend vers un nombre réel limite L quand sa variable x tend vers $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; x_0 \in \mathbb{R} : \forall \; x \in \mathbb{R} : x > x_0 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon}$$

On écrit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

f tend vers $+\infty$ quand sa variable x tend vers $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall A > 0 \; \exists \; x_0 \in \mathbb{R} : \forall \; x \in \mathbb{R} : x > x_0 \Rightarrow f(x) > A}$$

On écrit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

f tend vers $-\infty$ quand sa variable x tend vers $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall A > 0 \; \exists \; x_0 \in \mathbb{R} : \forall \; x \in \mathbb{R} : x > x_0 \Rightarrow f(x) < -A}$$

On écrit :

$$\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Noter que les trois définitions précédentes sont des extensions naturelles des notions de limite d'une suite numérique.

2) <u>Limites en $-\infty$</u>

Ce concept est très similaire au précédent.

f tend vers un nombre réel limite L quand sa variable x tend vers $-\infty$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x_0 \in \mathbb{R} : \forall\ x \in \mathbb{R} : x < x_0 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon}$$

On écrit :

$$\lim_{\mathrm{x}\to-\infty} f(x) = L$$

f tend vers $+\infty$ quand sa variable x tend vers $-\infty$ si :

$$\boxed{\forall A > 0\ \exists\ x_0 \in \mathbb{R} : \forall\ x \in \mathbb{R} : x < x_0 \Rightarrow f(x) > A}$$

On écrit :

$$\lim_{\mathrm{x}\to-\infty} f(x) = +\infty$$

f tend vers $-\infty$ quand sa variable x tend vers $-\infty$ si :

$$\boxed{\forall A > 0\ \exists\ x_0 \in \mathbb{R} : \forall\ x \in \mathbb{R} : x < x_0 \Rightarrow f(x) < -A}$$

On écrit :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

3) <u>Limite finie en un nombre</u> x_0

f tend vers un nombre réel limite L quand sa variable x tend vers un nombre réel x_0 si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \alpha > 0 : \forall\ x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\} : \ x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon}$$

On écrit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

f tend vers un nombre réel limite L quand sa variable x tend vers un nombre réel x_0 par valeurs supérieures si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \alpha > 0 : \forall\ x \in \mathbb{R} : x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon}$$

On dit alors que f a une limite à droite en x_0 et on écrit :

$$\lim_{x \to {x_0}^+} f(x) = L$$

f tend vers un nombre réel limite L quand sa variable x tend vers un nombre réel x_0 par valeurs inférieures si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \alpha > 0 : \forall\ x \in \mathbb{R} : \ x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon}$$

On dit alors que f a une limite à gauche en x_0 et on écrit :

$$\lim_{x \to {x_0}^-} f(x) = L$$

4) <u>Limite infinie en un nombre</u> x_0

f tend vers $+\infty$ quand sa variable x tend vers un nombre réel x_0 si :

$$\boxed{\forall A > 0\ \exists\ \alpha > 0 : \forall\ x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\} : \ x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha \ \Rightarrow \ f(x) > A}$$

On écrit :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

f tend vers $-\infty$ quand sa variable x tend vers un nombre réel a si :

$$\forall A > 0\ \exists\ \alpha > 0 : \forall\ x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\} :\ x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha\ \ \Rightarrow\ f(x) < -A$$

On écrit :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

On définit également comme précédemment, pour ces deux cas, les notions de limite à droite et de limite à gauche

III Propriétés des limites

Dans toute la suite f et g désignent deux fonctions numériques :

1) Formes déterminées avec des limites finies

Si f et g ont pour limites respectivement L et L' quand x tend $+\infty$ (respectivement $-\infty$, a, a^+, a^-) alors, quand x tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$, a, a^+, a^-), la fonction somme $h = f + g$ a pour limite $L + L'$, la fonction différence $h = f - g$ a pour limite $L - L'$, la fonction produit $h = f \times g$ a pour limite $L \times L'$, et si $L' \neq 0$ la fonction quotient $h = f/g$ a pour limite L/L'

Preuves

Nous n'allons pas faire les preuves de toutes ces propriétés tant elles sont analogues à celles faites pour les suites. Nous nous contenterons d'en faire une, sur la somme, quand x tend vers un nombre réel a à titre d'exemple.

Supposons donc :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = L'$

Soit $\varepsilon > 0$, traduisons la définition de la limite pour chaque suite avec le nombre $\frac{\varepsilon}{2}$

$$\exists\, \alpha > 0 : \forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\} : x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha \Rightarrow L - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists\, \alpha' > 0 : \forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\} : x_0 - \alpha' < x < x_0 + \alpha' \Rightarrow L - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit alors α'' le plus petit de α et α' qui ne sont pas nécessairement égaux. Alors :

$$x_0 - \alpha'' < x < x_0 + \alpha'' \Rightarrow \begin{cases} L - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < L + \frac{\varepsilon}{2} \\ L' - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < L' + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Donc, en additionnant les encadrements :

$$x_0 - \alpha'' < x < x_0 + \alpha'' \Rightarrow L + L' - \varepsilon < f(x) + g(x) < L + L' + \varepsilon$$

Ce qui prouve :

$$\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = L + L'$$

2) <u>Formes déterminées avec des limites infinies de même signe</u>

Si f et g ont pour limites toutes deux $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend $+\infty$ (respectivement $-\infty$, a, a^+, a^-) alors, quand x tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$, a, a^+, a^-), la fonction somme $h = f + g$ a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$), la fonction produit $h = f \times g$ a pour limite $+\infty$

3) <u>Résumé symbolique des formes déterminées et des formes indéterminées pour la limite</u>

a) <u>Formes déterminées</u>

$$+\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty$$

$$+\infty \times (+\infty) = +\infty$$

$$+\infty \times (-\infty) = -\infty$$

$$+\infty + \mathbf{L} = +\infty$$

$$-\infty + \mathbf{L} = -\infty$$

$$+\infty \times (\mathbf{L} > 0) = +\infty$$

$$-\infty \times (\mathbf{L} > 0) = -\infty$$

$$+\infty \times (\mathbf{L} < 0) = -\infty$$

$$-\infty \times (\mathbf{L} < 0) = +\infty$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}^{+}} = +\infty$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}^{-}} = -\infty$$

$$\frac{\mathbf{1}}{+\infty} = \mathbf{0}^{+}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{-\infty} = \mathbf{0}^{-}$$

Pour les quatre dernières, penser à la fonction inverse

b) <u>Formes indéterminées</u>

$$+\infty + (-\infty) = ?$$

$$\frac{+\infty}{+\infty} = ?$$

$$\frac{-\infty}{-\infty} = ?$$

$$\frac{+\infty}{-\infty} = ?$$

$$\frac{-\infty}{+\infty} = ?$$

$$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} = ?$$

$$+\infty \times \mathbf{0} = ?$$

$$-\infty \times \mathbf{0} = ?$$

IV Théorème des gendarmes

1$^{\text{ère}}$ forme : à deux gendarmes

Si f et g sont deux fonctions numériques ayant pour même limite L quand x tend $+\infty$ (respectivement $-\infty$, a, a^+, a^-) et si h est une foncton encadrée par ces deux dernières (de ce fait appelées gendarmes), c'est-à-dire vérifiant :

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

alors h converge vers la même limite L quand x tend $+\infty$ (respectivement $-\infty$, a, a^+, a^-)

Preuve :

Elle est analogue à celle faite dans le cas des suites numériques

2ème forme : à un gendarme

Si f est une fonction numérique tendant vers $+\infty$ quand x tend $+\infty$ (respectivement $-\infty$, a, a^+, a^-) et si g est une fonction numérique minorée par cette dernière (de ce fait appelée gendarme), c'est-à-dire vérifiant

$$f(x) \leq g(x)$$

alors g tend également vers $+\infty$ quand x tend $+\infty$ (respectivement $-\infty$, a, a^+, a^-)

3ème forme : à un gendarme

Si f est une fonction numérique tendant vers $-\infty$ quand x tend $+\infty$ (respectivement $-\infty$, a, a^+, a^-) et si g est une fonction numérique majorée par cette dernière (de ce fait appelée gendarme), c'est-à-dire vérifiant

$$g(x) \leq f(x)$$

alors g tend également vers $-\infty$ quand x tend $+\infty$ (respectivement $-\infty$, a, a^+, a^-)

V Caractérisations de Cauchy

Soit f est une fonction numérique, alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x) = L} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{\varepsilon} > 0\ \exists\ \boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R} : \forall\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} \boldsymbol{x > x_0} \\ \boldsymbol{x' > x_0} \end{cases} \Rightarrow |\boldsymbol{f(x) - f(x')}| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{f(x) = L} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{\varepsilon} > 0\ \exists\ \boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R} : \forall\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} \boldsymbol{x < x_0} \\ \boldsymbol{x' < x_0} \end{cases} \Rightarrow |\boldsymbol{f(x) - f(x')}| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to a} \boldsymbol{f(x) = L} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{\varepsilon} > 0\ \exists\ \alpha > 0 : \forall\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} \boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{x_0 - \alpha}\ ;\ \boldsymbol{x_0 + \alpha}[\backslash\{\boldsymbol{a}\} \\ \boldsymbol{x'} \in]\boldsymbol{x_0 - \alpha}\ ;\ \boldsymbol{x_0 + \alpha}[\backslash\{\boldsymbol{a}\} \end{cases} \Rightarrow |\boldsymbol{f(x) - f(x')}| < \varepsilon$$

VI Composée avec des suites

On note :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$$

Soit f une fonction numérique et $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}$, alors :

$$\lim_{x\to a} \boldsymbol{f(x) = b} \Rightarrow \left(\forall\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \left(\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{X_n} = \mathbf{a}\ \ \mathbf{et}\ \forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} :\ \boldsymbol{X_n \neq a}\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{f(X_n) = b}\right)$$

Preuve :

Nous nous contenterons de démontrer le cas où $a = x_0 \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$, les autres étant analogues.

Supposons $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et soit X une suite numérique tendant vers x_0

Soit un réel $A > 0$ alors :

$$\exists\ \alpha > 0 : \forall\ x \in\ ]x_0 - \alpha\ ; x_0 + \alpha[\backslash\{x_0\} :\ f(x) > A$$

Pour $\alpha > 0$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow X_n \in \left]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha\right[\backslash\{x_0\}$$

Donc :

$$n > n_0 \Rightarrow f(X_n) > A$$

D'où :

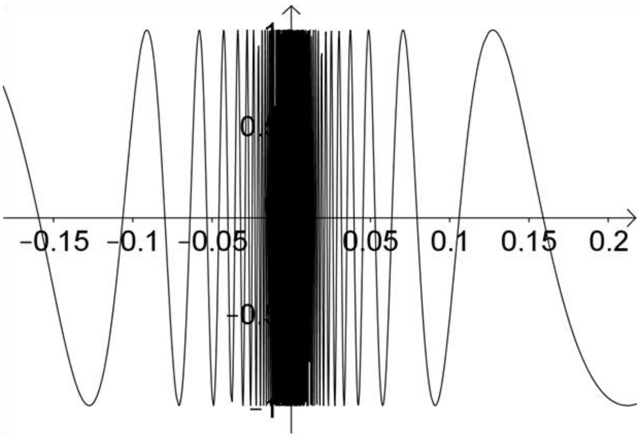
$$\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} f(X_n) = +\infty$$

<u>Exemple d'application</u> :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par **:**

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Voilà l'image qu'en donne un traceur de courbes



Quand x tend vers 0 par valeur supérieure, son inverse tend vers $+\infty$ ce qui laisse à penser que la fonction va osciller entre 1 et -1 indéfiniment et amène à conjecturer qu'elle n'a pas de limite en 0 par valeur supérieure (et par valeur inférieure car elle est impaire). Prouvons cette conjecture.

Construisons pour cela une suite X tendant vers 0 par valeur supérieure, telle que les images de ses termes valent 1. Il suffit de poser :

$$\frac{1}{X_n} = \frac{\pi}{2} + 2\,n\pi$$

Soit :

$$X_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\,n\pi}$$

Il est clair que :

$$\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} X_n = 0$$

et

$$\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} f(X_n) = \lim_{\mathrm{n}\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\,n\pi\right) = 1$$

Donc, si f admet une limite en 0 par valeur supérieure, ce ne peut être que 1

Construisons alors une seconde suite X' tendant vers 0 par valeur supérieure, telle que les images de ses termes valent 1. Il suffit de poser :

$$\frac{1}{X'_n} = -\frac{\pi}{2} + 2\,n\pi$$

Soit :

$$X'_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\,n\pi}$$

Il est clair que :

$$\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} X'_n = 0$$

et

$$\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} f(X'_n) = \lim_{\mathrm{n}\to+\infty} \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\,n\pi\right) = -1$$

Nous obtenons alors une contradiction car cette limite devrait être 1 également.

VII Asymptotes horizontales et verticales

Dans la suite, la fonction f est représentée par une courbe $\mathcal{C}_f$ dans un plan muni d'un repère orthogonal $(O\ , x, y)$

1) Asymptote horizontale

Dans le cas où on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

considérons ladroite Δ d'équation $y = L$, le point $M(x, f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ et le point $N(x, L)$ de Δ

La distance entre ces deux points est :

$$MN = |f(x) - L|$$

Quand x tend vers $+\infty$, les deux points M et N s'éloignent infiniment de l'origine du repère tout en se rapprochant indéfiniment.

On qualifie la droite Δ d'asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

Dans le cas où on a :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Δ est asymptote horizntale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$

2) Asymptote verticale

Dans le cas où on a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

considérons la droite Δ d'équation $x = a$, le point $M(x, f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ et le point $N(a, f(x))$ de Δ

La distance entre ces deux points est :

$$MN = |x - a|$$

Quand x tend vers a (par valeur supérieure ou inférieure ou les deux), les deux points M et N s'éloignent infiniment de l'origine du repère tout en se rapprochant indéfiniment.

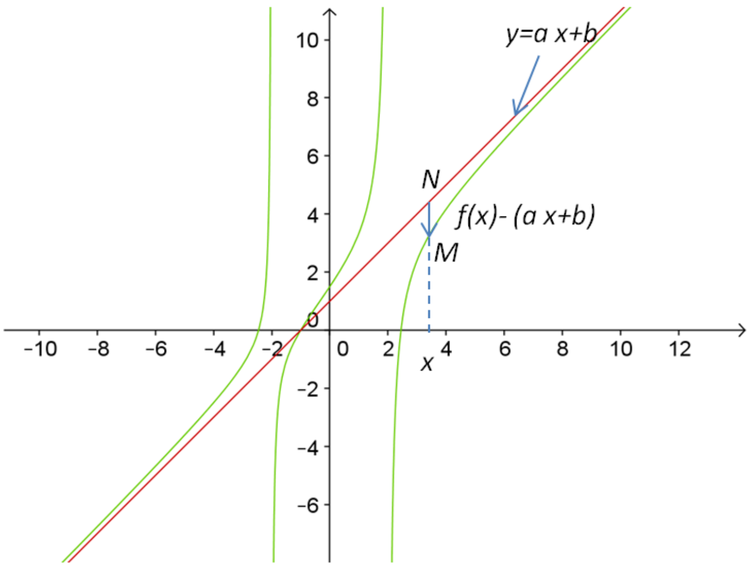
On qualifie la droite Δ d'asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

VII Asymptotes obliques - courbes asymptotes

1) Asymptotes obliques

Dans le cas où on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (a\,x + b) = 0$$



considérons la droite Δ d'équation $y = a\,x + b$, le point $M(x, f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ et le point $N(x, a\,x + b)$ de Δ

La distance entre ces deux points est :

$$MN = |f(x) - (a\,x + b)|$$

Quand x tend vers $+\infty$, les deux points M et N s'éloignent infiniment de l'origine du repère tout en se rapprochant indéfiniment.

On qualifie la droite Δ d'asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

Si maintenant on a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(a\,x+b)=0$$

Δ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$

<u>Caractérisation des asymptotes obliques :</u>

Δ d'équation $\boldsymbol{y=a\,x+b}$ asymptote oblique à $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ en $+\infty$ $$\Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)-a\,x=b \end{cases}$$

Même caractérisation en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$

<u>Preuve</u> :

$(\Rightarrow)$

Si Δ d'équation $y=a\,x+b$ asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(a\,x+b)=0$$

Donc en divisant par x :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(a\,x+b)}{x}=0$$

Soit :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}=0$$

En notant que :

$$\lim_{x\to+\infty} a+\frac{b}{x}=a$$

Par addition de cette limite à la précédente, on en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$$

$(\Leftarrow)$

Si on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - a\,x = b$$

Alors, en soustrayant b à cette relation, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (a\,x + b) = 0$$

donc Δ d'équation $y = a\,x + b$ asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$

2) <u>Courbe asymptote</u>

Cette notion généralise la précédente ;

la courbe d'équation $y = g(x)$ est asymptote à la courbe d'équation $y = f(x)$ en $+\infty$ si :

$$\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x) - g(x)} = 0$$

Définition analogue en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$

<u>Exemple</u> :

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3}{x - 1}$$

Un procédé qualifié de division euclidienne des polynômes qui sera développé ultérieurement permet de mettre f sous la forme :

$$f(x) = x^2 + x + 1 + \frac{4}{x - 1}$$

Posons :

$$g(x) = x^2 + x + 1$$

Alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x - 1} = 0$$

De même :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x - 1} = 0$$

La parabole d'équation $y = x^2 + x + 1$ est donc asymptote à la courbe d'équation $y = f(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$